गणित

प्रश्नावली 5.3

प्रश्न 1:

निम्नलिखित समांतर श्रेढ़ियों का योग ज्ञात कीजिए:

(i) $2, 7, 12, \ldots, 10$ पदों तक

(ii) $-37, -33, -29, \ldots, 12$ पदों तक

(iii) $0.6, 1.7, 2.8, \ldots, 100$ पदों तक

(iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \ldots, 11$ पदों तक

उत्तर 1:

(i) A. P.: $2, 7, 12, \ldots$

यहाँ, $a = 2$ तथा $d = 7 - 2 = 5$ है,

A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$\Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}[2(2) + (10-1)(5)]$

$\Rightarrow S_{10} = 5[4 + 45] = 245$

(ii) A. P.: $-37, -33, -29, \ldots$

यहाँ, $a = -37$ तथा $d = -33 - (-37) = 4$ है,

A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$\Rightarrow S_{12} = \frac{12}{2}[2(-37) + (12-1)(4)]$

$\Rightarrow S_{12} = 6[-74 + 44] = -180$

(iii) A. P.: $0.6, 1.7, 2.8, \ldots$

यहाँ, $a = 0.6$ तथा $d = 1.7 - 0.6 = 1.1$ है,

A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$\Rightarrow S_{100} = \frac{100}{2}[2(0.6) + (100-1)(1.1)]$

$\Rightarrow S_{100} = 50[1.2 + 99 \times 1.1] = 50[110.1] = 5505$

(iv) A. P.: $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \ldots$

यहाँ, $a = \frac{1}{15}$ तथा $d = \frac{1}{12} - \left(\frac{1}{15}\right) = \frac{1}{60}$ है,

A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$\Rightarrow S_{11} = \frac{11}{2}\left[2\left(\frac{1}{15}\right) + (11-1)\left(\frac{1}{60}\right)\right]$

$\Rightarrow S_{11} = \frac{11}{2}\left[\frac{2}{15} + \frac{1}{6}\right] = \frac{11}{2}\left[\frac{9}{30}\right] = \frac{33}{20}$

प्रश्न 2:

निचे दिए हुए योगफलों को ज्ञात कीजिए :

(i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \cdots + 84$

(ii) $34 + 32 + 30 + \cdots + 10$

(iii) $-5 + (-8) + (-11) + \cdots + (-230)$

उत्तर 2:

(i) यहाँ, $a = 7$ तथा $d = 10\frac{1}{2} - 7 = \frac{21}{2} - 7 = \frac{7}{2}$ है,
माना, A.P. का nवाँ पद 84 है।
इसलिए $a_n = 84$
$\Rightarrow a + (n-1)d = 84$
$\Rightarrow 7 + (n-1)\left(\frac{7}{2}\right) = 84$
$\Rightarrow (n-1)\left(\frac{7}{2}\right) = 77$
$\Rightarrow n - 1 = 22$
$\Rightarrow n = 23$
A.P. का n पदों तक का योग $S_n = \frac{n}{2}[a + l]$
$\Rightarrow S_{23} = \frac{23}{2}[7 + 84]$
$\Rightarrow S_{23} = \frac{23}{2}[91] = \frac{2093}{2} = 1046\frac{1}{2}$

(ii) यहाँ, $a = 34$ तथा $d = 32 - 34 = -2$ है,
माना, A.P. का nवाँ पद 10 है।
इसलिए $a_n = 10$
$\Rightarrow a + (n-1)d = 10$
$\Rightarrow 34 + (n-1)(-2) = 10$
$\Rightarrow (n-1)(-2) = -24$
$\Rightarrow n - 1 = 12$
$\Rightarrow n = 13$
A.P. का n पदों तक का योग $S_n = \frac{n}{2}[a + l]$
$\Rightarrow S_{13} = \frac{13}{2}[34 + 10]$
$\Rightarrow S_{13} = \frac{13}{2}[44]$
$= 13 \times 22 = 286$

(iii) यहाँ, $a = -5$ तथा $d = -8 - (-5) = -3$ है,
माना, A.P. का nवाँ पद -230 है।
इसलिए $a_n = -230$
$\Rightarrow a + (n-1)d = -230$
$\Rightarrow -5 + (n-1)(-3) = -230$
$\Rightarrow (n-1)(-3) = -225$
$\Rightarrow n - 1 = 75$
$\Rightarrow n = 76$
A.P. का n पदों तक का योग $S_n = \frac{n}{2}[a + l]$
$\Rightarrow S_{76} = \frac{76}{2}[-5 - 230]$
$\Rightarrow S_{76} = \frac{76}{2}[-235]$
$= -38 \times 235$
$= -8930$

प्रश्न 3:
एक A.P. में,
(i) $a = 5,\ d = 3$ और $a_n = 50$ दिया है। n और S_n ज्ञात कीजिए।
(ii) $a = 7$ और $a_{13} = 35$ दिया है। d और S_{13} ज्ञात कीजिए।
(iii) $a_{12} = 37$ और $d = 3$ दिया है। a और S_{12} ज्ञात कीजिए।
(iv) $a_3 = 15$ और $S_{10} = 125$ दिया है। d और a_{10} ज्ञात कीजिए।
(v) $d = 5$ और $S_9 = 75$ दिया है। a और a_9 ज्ञात कीजिए।
(vi) $a = 2,\ d = 8$ और $S_n = 90$ दिया है। n और a_n ज्ञात कीजिए।
(vii) $a = 8, a_n = 62$ और $S_n = 210$ दिया है। n और d ज्ञात कीजिए।
(viii) $a_n = 4, d = 2$ और $S_n = -14$ दिया है। n और a ज्ञात कीजिए।
(ix) $a = 3, n = 8$ और $S = 192$ दिया है। d ज्ञात कीजिए।
(x) $l = 28, S = 144$ और कुल 9 पद हैं। a ज्ञात कीजिए।

उत्तर 3:
(i) यहाँ, $a = 5,\ d = 3$ तथा $a_n = 50$ है,
A.P. का nवाँ पद 50 है।
इसलिए $a_n = 50$
$\Rightarrow a + (n-1)d = 50$
$\Rightarrow 5 + (n-1)(3) = 50$
$\Rightarrow (n-1)(3) = 45$
$\Rightarrow n - 1 = 15$
$\Rightarrow n = 16$
A.P. का n पदों तक का योग $\quad S_n = \frac{n}{2}[a + l]$
$\Rightarrow S_{16} = \frac{16}{2}[5 + 50] \quad \Rightarrow S_{16} = 8[55] = 440$

(ii) यहाँ, $a = 7$ तथा $a_{13} = 35$ है,
A.P. का 13वाँ पद 35 है।
इसलिए $a_{13} = 35$
$\Rightarrow a + (13-1)d = 35$
$\Rightarrow 7 + 12d = 35$
$\Rightarrow 12d = 28$
$\Rightarrow d = \frac{28}{12} = \frac{7}{3}$
A.P. का n पदों तक का योग $\quad S_n = \frac{n}{2}[a + l]$
$\Rightarrow S_{13} = \frac{13}{2}[7 + 35] \quad \Rightarrow S_{13} = \frac{13}{2}[42] = 273$
(iii) यहाँ, $d = 3$ तथा $a_{12} = 37$ है,
A.P. का 12वाँ पद 37 है।
इसलिए $a_{12} = 50$
$\Rightarrow a + (12-1)d = 37$
$\Rightarrow a + 11(3) = 37$
$\Rightarrow a = 37 - 33 = 4$
A.P. का n पदों तक का योग $\quad S_n = \frac{n}{2}[a + l]$
$\Rightarrow S_{12} = \frac{12}{2}[4 + 37] \quad \Rightarrow S_{12} = 6[41] = 246$

(iv) यहाँ, $a_3 = 15$ तथा $S_{10} = 125$ है,
$a_3 = 15$
$\Rightarrow a + (3-1)d = 15$
$\Rightarrow a + 2d = 15$
$\Rightarrow a = 15 - 2d$ ... (1)
A.P. का n पदों तक का योग $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$
$\Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}[2a + (10-1)d]$
$\Rightarrow 125 = 5[2a + 9d]$
$\Rightarrow 2a + 9d = 25$
समीकरण (1) से a का मान रखने पर
$2(15 - 2d) + 9d = 25$
$\Rightarrow 30 - 4d + 9d = 25$
$\Rightarrow 5d = -5 \quad \Rightarrow d = -1$
समीकरण (1) में d का मान रखने पर
$\Rightarrow a = 15 - 2(-1) = 17$
$a_n = a + (n-1)d$
$\Rightarrow a_{10} = 17 + (10-1)(-1) = 17 - 9 = 8$
$\Rightarrow a_{10} = 8$

(v) यहाँ, $d = 5$ तथा $S_9 = 75$ है,
A.P. का n पदों तक का योग $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$
$\Rightarrow S_9 = \frac{9}{2}[2a + (9-1)(5)]$
$\Rightarrow 75 = \frac{9}{2}[2a + 40]$
$\Rightarrow 75 = 9a + 180$
$\Rightarrow a = -\frac{105}{9} = -\frac{35}{3}$
$a_n = a + (n-1)d$
$\Rightarrow a_9 = -\frac{35}{3} + (9-1)(5) = -\frac{35}{3} + 40 = \frac{85}{3}$
$\Rightarrow a_{10} = \frac{85}{3}$

(vi) यहाँ, $a = 2,\ d = 8$ तथा $S_n = 90$ है,
A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$\Rightarrow 90 = \frac{n}{2}[2(2) + (n-1)(8)]$
$\Rightarrow 90 = \frac{n}{2}[4 + 8n - 8]$
$\Rightarrow 90 = \frac{n}{2}[8n - 4]$
$\Rightarrow 90 = 4n^2 - 2n$
$\Rightarrow 2n^2 - n - 45 = 0$
$\Rightarrow 2n^2 - 10n + 9n - 45 = 0$
$\Rightarrow 2n(n-5) + 9(n-5) = 0$
$\Rightarrow (2n+9)(n-5) = 0$

$\Rightarrow n - 5 = 0$ $\quad$ [$\because$ $2n + 9 \neq 0$ क्योंकि $n \neq -\frac{9}{2}$]
$\Rightarrow n = 5$
$a_n = a + (n-1)d$
$\Rightarrow a_5 = 2 + (5-1)(8) = 2 + 32 = 34$
$\Rightarrow a_{10} = 34$

(vii) यहाँ, $a = 8,\ a_n = 62$ तथा $S_n = 210$ है,
A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[a + a_n]$$

$\Rightarrow 210 = \frac{n}{2}[8 + 62]$
$\Rightarrow 210 = 35n$
$\Rightarrow n = \frac{210}{35} = 6$
$a_n = a + (n-1)d$
$\Rightarrow 62 = 8 + (6-1)d$
$\Rightarrow 54 = 5d \quad \Rightarrow d = \frac{54}{5}$

(viii) यहाँ, $a_n = 4, d = 2$ तथा $S_n = -14$ है,
$a_n = a + (n-1)d$
$\Rightarrow 4 = a + (n-1)(2)$
$\Rightarrow 4 = a + 2n - 2$
$\Rightarrow a = 6 - 2n$ $\quad$ ... (1)
A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$\Rightarrow -14 = \frac{n}{2}[2a + (n-1)(2)]$
$\Rightarrow -14 = n[a + n - 1]$
समीकरण (1) से a का मान रखने पर
$-14 = n[6 - 2n + n - 1]$
$\Rightarrow -14 = n[5 - n]$
$\Rightarrow -14 = 5n - n^2$
$\Rightarrow n^2 - 5n - 14 = 0$
$\Rightarrow n^2 - 7n + 2n - 14 = 0$
$\Rightarrow n(n-7) + 2(n-7) = 0$
$\Rightarrow (n-7)(n+2) = 0$
$\Rightarrow n - 7 = 0$ $\quad$ [$\because$ $n + 2 \neq 0$ क्योंकि $n \neq -2$]
$\Rightarrow n = 7$
समीकरण (1) में d का मान रखने पर
$\Rightarrow a = 6 - 2(7) = -8$

(ix) यहाँ, $a = 3,\ n = 8$ तथा $S = 192$ है,
A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[a + a_n]$$

$\Rightarrow 192 = \frac{8}{2}[3 + a_n]$
$\Rightarrow 192 = 4[3 + a_n]$
$\Rightarrow 3 + a_n = \frac{192}{4} = 48$
$\Rightarrow a_n = 45$
$a_n = a + (n-1)d$
$\Rightarrow 45 = 3 + (8-1)d$
$\Rightarrow 42 = 7d \quad \Rightarrow d = 6$

(x) यहाँ, $l = 28,\ S = 144$ तथा $n = 9$ है,
A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$$

$\Rightarrow 144 = \frac{9}{2}[a + 28]$
$\Rightarrow 144 \times \frac{2}{9} = a + 28$
$\Rightarrow 32 = a + 28 \quad \Rightarrow a = 4$

प्रश्न 4:
636 योग प्राप्त करने के लिए A.P.: 9, 17, 25, ... के कितने पद लेने चाहिए?

उत्तर 4:
यहाँ, $a = 9,\ d = 17 - 9 = 8$ तथा $S_n = 636$ है,
A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$\Rightarrow 636 = \frac{n}{2}[2(9) + (n-1)(8)]$
$\Rightarrow 636 = n[9 + 4n - 4]$
$\Rightarrow 4n^2 + 5n - 636 = 0$
$\Rightarrow 4n^2 + 53n - 48n - 636 = 0$
$\Rightarrow n(4n + 53) - 12(4n + 53) = 0$
$\Rightarrow (n - 12)(4n + 53) = 0$
$\Rightarrow n - 12 = 0 \qquad [\because\ 4n + 53 \neq 0$ क्योंकि $n \neq -\frac{53}{4}]$
$\Rightarrow n = 12$
अतः, 636 योग प्राप्त करने के लिए A.P.: 9, 17, 25, ... के 12 पद लेने चाहिए।

प्रश्न 5:
किसी A.P का प्रथम पद 5, अंतिम पद 45 और योग 400 है। पदों की संख्या और सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

उत्तर 5:
यहाँ, $a = 5,\ a_n = 45$ तथा $S_n = 400$ है,
A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[a + a_n]$$

$\Rightarrow 400 = \frac{n}{2}[5 + 45]$
$\Rightarrow 400 = 25n$
$\Rightarrow n = \frac{400}{25} = 16$
$a_n = a + (n-1)d$
$\Rightarrow 45 = 5 + (16-1)d$
$\Rightarrow 40 = 15d$
$\Rightarrow d = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$
अतः, पदों की संख्या 16 और सार्व अंतर $\frac{8}{3}$ है।

प्रश्न 6:
किसी A.P के प्रथम और अंतिम पद क्रमशः 17 और 350 हैं। यदि सार्व अंतर 9 है, तो इसमें कितने पद हैं और इनका योग क्या है?

उत्तर 6:
यहाँ, $a = 17,\ a_n = 350$ तथा $d = 9$ है,
$a_n = a + (n-1)d$
$\Rightarrow 350 = 17 + (n-1)9$
$\Rightarrow 350 = 8 + 9n$
$\Rightarrow n = \frac{342}{9} = 38$
A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[a + a_n]$$

$\Rightarrow S_{38} = \frac{38}{2}[17 + 350]$
$\Rightarrow S_{38} = 19 \times 367$
$= 6973$
अतः, इसमें 38 पद हैं और इनका योग 6973 है।

प्रश्न 7:
उस A.P. के प्रथम 22 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसमें $d = 7$ है और 22वाँ पद 149 है।

उत्तर 7:
यहाँ, $d = 7,\ a_n = 149$ तथा $n = 22$ है,
$a_n = a + (n-1)d$
$\Rightarrow 149 = a + (22-1)(7)$
$\Rightarrow 149 = a + 147$
$\Rightarrow a = 2$
A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[a + a_n]$$

$\Rightarrow S_{22} = \frac{22}{2}[2 + 149]$
$\Rightarrow S_{22} = 11 \times 151$
$= 1661$
अतः, A.P. के प्रथम 22 पदों का योग 1661 है।

प्रश्न 8:

उस A.P. के प्रथम 51 पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसके दूसरे और तीसरे पद क्रमशः 14 और 18 हैं।

उत्तर 8:

यहाँ, $a_2 = 14$, $a_3 = 18$ तथा $n = 51$ है,
$a_n = a + (n-1)d$
$\Rightarrow a_2 = a + (2-1)d$
$\Rightarrow 14 = a + d$
$\Rightarrow a = 14 - d$ ... (1)
और $a_3 = a + (3-1)d$
$\Rightarrow 18 = a + 2d$
समीकरण (1) से a का मान रखने पर
$\Rightarrow 18 = 14 - d + 2d$
$\Rightarrow d = 4$
समीकरण (1) में d का मान रखने पर
$\Rightarrow a = 14 - 4 = 10$
A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$\Rightarrow S_{51} = \frac{51}{2}[2(10) + (51-1)(4)]$

$\Rightarrow S_{51} = \frac{51}{2}[220] = 5610$

प्रश्न 9:

यदि किसी A.P. के प्रथम 7 पदों का योग 49 है और प्रथम 17 पदों का योग 289 है, तो इसके प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

उत्तर 9:

यहाँ, $S_7 = 49$ तथा $S_{17} = 289$ है,
A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$\Rightarrow S_7 = \frac{7}{2}[2a + (7-1)d]$
$\Rightarrow 49 = \frac{7}{2}[2a + 6d]$
$\Rightarrow 49 = 7(a + 3d)$
$\Rightarrow 7 = a + 3d$
$\Rightarrow a = 7 - 3d$ ... (1)

और $S_{17} = \frac{17}{2}[2a + (17-1)d]$
$\Rightarrow 289 = \frac{17}{2}[2a + 16d]$
$\Rightarrow 289 = 17(a + 8d)$
$\Rightarrow 17 = a + 8d$

समीकरण (1) से a का मान रखने पर
$\Rightarrow 17 = 7 - 3d + 8d$
$\Rightarrow 5d = 10 \quad \Rightarrow d = 2$
समीकरण (1) में d का मान रखने पर
$\Rightarrow a = 7 - 3 \times 2 = 1$

A.P. का n पदों तक का योग

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$= \frac{n}{2}[2(1) + (n-1)(2)]$

$= \frac{n}{2}[2 + 2n - 2] = n^2$

प्रश्न 10:
दर्शाइए कि $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ से एक A.P. बनती है, यदि a_n नीचे दिए अनुसार परिभाषित है:
(i) $a_n = 3 + 4n$ **(ii)** $a_n = 9 - 5n$
साथ ही, प्रत्येक स्थिति में, प्रथम 15 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

उत्तर 10:
(i) $a_n = 3 + 4n$
n का मान 1 रखने पर
$a_1 = 3 + 4(1) = 7$
n का मान 2 रखने पर
$a_2 = 3 + 4(2) = 11$
इसीप्रकार, $a_3 = 3 + 4(3) = 15$
$a_4 = 3 + 4(4) = 19$
क्रमागत पदों में अंतर:
$a_2 - a_1 = 11 - 7 = 4$
$a_3 - a_2 = 15 - 11 = 4$
$a_4 - a_3 = 19 - 15 = 4$
क्रमागत पदों में अंतर समान है। अतः, $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ से एक A.P. बनती है।
A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}[2(7) + (15-1)(4)]$
$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}[70] = 525$

(ii) $a_n = 9 - 5n$
n का मान 1 रखने पर
$a_1 = 9 - 5(1) = 4$
n का मान 2 रखने पर
$a_2 = 9 - 5(2) = -1$
इसीप्रकार, $a_3 = 9 - 5(3) = -6$
$a_4 = 9 - 5(4) = -11$

क्रमागत पदों में अंतर:
$a_2 - a_1 = -1 - 4 = -5$
$a_3 - a_2 = -6 - (-1) = -5$
$a_4 - a_3 = -11 - (-6) = -5$
क्रमागत पदों में अंतर समान है। अतः, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ से एक A.P. बनती है।
A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}[2(4) + (15-1)(-5)]$
$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}[-62]$
$= -465$

प्रश्न 11:
यदि किसी A.P. के प्रथम n पदों का योग $4n - n^2$ है, तो इसका प्रथम पद (अर्थात a_1) क्या है? प्रथम दो पदों का योग क्या है? दूसरा पद क्या है? इसी प्रकार, तीसरे, 10वें और nवें पद ज्ञात कीजिए।

उत्तर 11:
A.P. के प्रथम n पदों का योग

$$S_n = 4n - n^2$$

n का मान 1 रखने पर
प्रथम पद $= a_1 = S_1 = 4(1) - (1)^2 = 3$
n का मान 2 रखने पर
प्रथम दो पदों का योग $= a_1 + a_2 = S_2 = 4(2) - (2)^2 = 4$
$\Rightarrow a_1 + a_2 = 4$
$\Rightarrow 3 + a_2 = 4$ [$\because$ प्रथम पद $a_1 = 3$]
$\Rightarrow a_2 = 1$
अतः, दूसरा पद 1 है।
सार्व अंतर $d = a_2 - a_1 = 1 - 3 = -2$
इसलिए, दसवाँ पद $= a_{10} = a + 9d = 3 + 9(-2) = -16$
इसी प्रकार, nवाँ पद $= a_n = a + (n-1)d = 3 + (n-1)(-2) = 5 - 2n$

प्रश्न 12:
ऐसे प्रथम 40 धन पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए जो 6 से विभाज्य हैं।

उत्तर 12:
प्रथम 40 धन पूर्णांक, जो 6 से विभाज्य हैं: $6, 12, 18, \ldots, 240$.
यहाँ, $a = 6, d = 12 - 6 = 6$ तथा $n = 40$ है,
A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$\Rightarrow S_{40} = \frac{40}{2}[2(6) + (40-1)(6)]$
$= 20[12 + 234]$
$= 20(246)$
$= 4920$
अतः, 6 से विभाज्य, प्रथम 40 धन पूर्णांकों का योग 4920 है।

प्रश्न 13:
8 के प्रथम 15 गुणजों का योग ज्ञात कीजिए।
उत्तर 13:
8 के प्रथम 15 गुणज: $8, 16, 24, \dots, 120$.
यहाँ, $a = 8, d = 16 - 8 = 8$ तथा $n = 15$ है,
A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}[2(8) + (15-1)(8)]$
$= \frac{15}{2}[16 + 112]$
$= \frac{15}{2}(128)$
$= 960$
अतः, 8 के प्रथम 15 गुणजों का योग 960 है।

प्रश्न 14:
0 और 50 के बीच की विषम संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।
उत्तर 14:
0 और 50 के बीच की विषम संख्याएँ: $1, 3, 5, \dots, 49$.
यहाँ, $a = 1, d = 3 - 1 = 2$ तथा $n = 25$ है,
A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$\Rightarrow S_{25} = \frac{25}{2}[2(1) + (25-1)(2)]$
$= \frac{25}{2}[2 + 48]$
$= \frac{25}{2}(50) \quad = 625$
अतः, 0 और 50 के बीच की विषम संख्याओं का योग 625 है।

प्रश्न 15:
निर्माण कार्य से संबंधित किसी ठेके में, एक निश्चित तिथि के बाद कार्य को विलंब से पूरा करने के लिए, जुर्माना लगाने का प्रावधान इस प्रकार है: पहले दिन के लिए ₹200, दूसरे दिन के लिए ₹250, तीसरे दिन के लिए ₹300 इत्यादि, अर्थात प्रत्येक उतरोत्तर दिन का जुर्माना अपने से ठीक पहले दिन के जुर्मानि से ₹50 अधिक है। एक ठेकेदार को जुर्मानि के रूप में कितनी राशि अदा करनी पड़ेगी, यदि वह इस कार्य में 30 दिन का विलंब कर देता है?
उत्तर 15:
जुर्मानि के रूप में अदा की गई राशि निम्नलिखित समांतर श्रेढ़ी में है:
₹200, ₹250, ₹300, ₹350, ...
यहाँ, $a = 200, d = 250 - 200 = 50$ तथा $n = 30$ है,
A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$\Rightarrow S_{30} = \frac{30}{2}[2(200) + (30 - 1)(50)]$
$= 15[400 + 1450]$
$= 15(1850) = 27750$
अतः, एक ठेकेदार को जुर्माने के रूप में ₹27750 राशि अदा करनी पड़ेगी।

प्रश्न 16:
किसी स्कूल के विद्यार्थियों को उनके समग्र शैक्षिक प्रदर्शन के लिए 7 नकद पुरस्कार देने के लिए ₹700 की राशि रखी गई है। यदि प्रत्येक पुरस्कार अपने से ठीक पहले पुरस्कार से ₹20 कम है, तो प्रत्येक पुरस्कार का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 16:
माना, पहला पुरस्कार = ₹ x
कुल पुरस्कार = 7
कुल राशि = ₹ 700
इसलिए, 7 पुरस्कार देने के लिए रखी गई राशि
$(x) + (x - 20) + (x - 40) + (x - 60) + (x - 80) + (x - 100) + (x - 120) = 700$
$\Rightarrow 7x - 420 = 700$
$\Rightarrow 7x = 1120$
$\Rightarrow x = \frac{1120}{7} = 160$
अतः, 7 पुरस्कारों की राशि: 160, 140, 120, 100, 80, 60 तथा 40 है।

प्रश्न 17:
एक स्कूल के विद्यार्थियों ने वायु प्रदूषण कम करने के लिए स्कूल के अंदर और बाहर पेड़ लगाने के बारे में सोचा। यह निर्णय लिया गया कि प्रत्येक कक्षा का प्रत्येक अनुभाग अपनी कक्षा की संख्या के बराबर पेड़ लगाएगा। उदाहरणार्थ, कक्षा I का एक अनुभाग 1 पेड़ लगाएगा, कक्षा II का एक अनुभाग 2 पेड़ लगाएगा, कक्षा III का एक अनुभाग 3 पेड़ लगाएगा, इत्यादि और ऐसा कक्षा XII तक के लिए चलता रहेगा। प्रत्येक कक्षा के तीन अनुभाग हैं। इस स्कूल के विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए कुल पेड़ों की संख्या कितनी होगी?

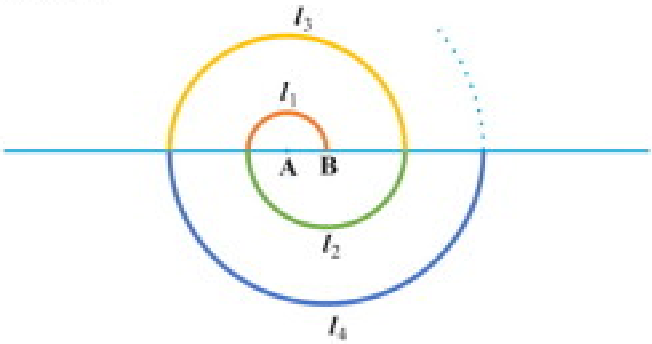
उत्तर 17:
कक्षा I का एक अनुभाग 1 पेड़ लगाएगा तथा प्रत्येक कक्षा के तीन अनुभाग हैं। इसलिए,
कक्षा I के विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए कुल पेड़ों की संख्या = $3 \times 1 = 3$
कक्षा II के विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए कुल पेड़ों की संख्या = $3 \times 2 = 6$
कक्षा III के विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए कुल पेड़ों की संख्या = $3 \times 3 = 9$
इसीप्रकार, प्रत्येक कक्षा द्वारा लगाए गए पेड़ों की संख्या निम्नलिखित है:
$3, 6, 9, \ldots, 36$
यहाँ, $a = 3, d = 6 - 3 = 3$ तथा $n = 12$ है,
A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

$\Rightarrow S_{12} = \frac{12}{2}[2(3) + (12 - 1)(3)]$
$= 6[6 + 33]$
$= 6(39) \quad = 234$
अतः, इस स्कूल के विद्यार्थियों द्वारा लगाए गए कुल पेड़ों की संख्या 234 है।

प्रश्न 18:

केंद्र A से प्रारंभ करते हुए, बारी-बारी से केंद्रों A और B को लेते हुए, त्रिज्याओं $0.5\ cm, 1.0\ cm, 1.5\ cm, 2.0\ cm, \ldots$ वाले उतरोत्तर अर्धवृत्तों को खींचकर एक सर्पिल (spiral) बनाया गया है, जैसाकि आकृति में दर्शाया गया है। तेरह क्रमागत अर्धवृत्तों से बने इस सर्पिल की कुल लंबाई क्या है? ($\pi = \frac{22}{7}$ लीजिए।)



[**संकेत**: क्रमशः केंद्रों $A,\ B,\ A,\ B, \ldots$ वाले अर्धवृत्तों की लंबाइयाँ $l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4$ हैं।]

उत्तर 18:

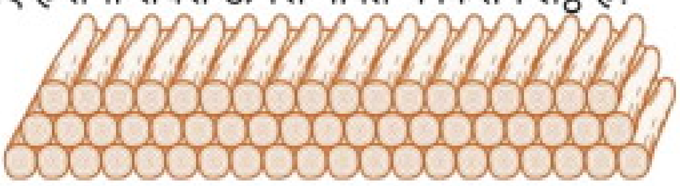
अर्धवृत्त का परिमाम $= \frac{1}{2}(2\pi r) = \pi r$
अर्धवृत्तों की त्रिज्याएँ: $0.5\ cm, 1.0\ cm, 1.5\ cm, 2.0\ cm, \ldots$
इसलिए, पहले सर्पिल की लंबाई $l_1 = \pi(0.5)\ cm$
दूसरे सर्पिल की लंबाई $l_2 = \pi(1.0)\ cm$
इसीप्रकार, $l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4, \ldots$ की लंबाई निम्नलिखित है:
$\pi(0.5)\ cm, \pi(1.0)\ cm, \pi(1.5)\ cm, \pi(2.0)\ cm, \pi(2.5)\ cm, \ldots$
यहाँ, $a = 0.5\pi, d = 1.0\pi - 0.5\pi = 0.5\pi$ तथा $n = 13$ है,
A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$\Rightarrow S_{13} = \frac{13}{2}[2(0.5\pi) + (13-1)(0.5\pi)]$
$= 6.5[\pi + 6\pi]$
$= 6.5\left(7 \times \frac{22}{7}\right) \quad = 6.5 \times 22 = 143\ cm$
अतः, तेरह क्रमागत अर्धवृत्तों से बने इस सर्पिल की कुल लंबाई $143\ cm$ है।

प्रश्न 19:

200 लट्ठों (logs) को ढेरी के रूप में इस प्रकार रखा जाता है: सबसे नीचे वाली पंक्ति में 20 लट्ठे, उससे अगली पंक्ति में 19 लट्ठे, उससे अगली पंक्ति में 18 लट्ठे, इत्यादि (देखिए आकृति)। ये 200 लट्ठे कितनी पंक्तियों में रखे गए है तथा सबसे ऊपरी पंक्ति में कितने लट्ठे है?



उत्तर 19:

सबसे नीचे वाली पंक्ति में लट्ठे $= 20$, अगली पंक्ति में लट्ठे $= 19$, उससे अगली पंक्ति में लट्ठे $= 18$
इसप्रकार, लट्ठों की समांतर श्रेणी निम्नलिखित होगी:
$20, 19, 18, 17, \ldots$
यहाँ, $a = 20, d = 19 - 20 = -1$ तथा $S_n = 200$ है,

A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$\Rightarrow 200 = \frac{n}{2}[2(20) + (n-1)(-1)]$
$\Rightarrow 400 = n[40 - n + 1]$
$\Rightarrow 400 = 41n - n^2$
$\Rightarrow n^2 - 41n + 400 = 0$
$\Rightarrow n^2 - 16n - 25n + 400 = 0$
$\Rightarrow n(n-16) - 25(n-16) = 0$
$\Rightarrow (n-16)(n-25) = 0$
$\Rightarrow n - 16 = 0$ या $n - 25 = 0$
$\Rightarrow n = 16$ या $n = 25$
यदि, $n = 16, a_{16} = a + 15d = 20 + 15(-1) = 5$
यदि, $n = 25, a_{25} = a + 24d = 20 + 24(-1) = -4$, जो कि संभव नहीं है।
अतः, ये 200 लट्ठे 16 पंक्तियों में रखे गए है तथा सबसे ऊपरी पंक्ति में 5 लट्ठे है।

प्रश्न 20:

एक आलू दौड़ (potato race) में, प्रारंभिक स्थान पर एक बाल्टी रखी हुई है, जो पहले आलू से $5m$ की दूरी पर है, तथा अन्य आलुओं को एक सीधी रेखा में परस्पर $3m$ की दूरियों पर रखा गया है। इस रेखा पर 10 आलू रखे गए हैं (देखिए आकृति)।

प्रत्येक प्रतियोगी बाल्टी से चलना प्रारंभ करती है, निकटतम आलू को उठाती है, उसे लेकर वापस आकर दौड़कर बाल्टी में डालती है, दूसरा आलू उठाने के लिए वापस दौड़ती है, उसे उठाकर वापस बाल्टी में डालती है, और वह ऐसा तब तक करती रहती है, जब तक सभी आलू बाल्टी में न आ जाएँ। इसमें प्रतियोगी को कुल कितनी दूरी दौड़नी पड़ेगी?
[**संकेत**: पहले और दूसरे आलुओं को उठाकर बाल्टी में डालने तक दौड़ी गई दूरी $= 2 \times 5, 2 \times (5 + 3)$ है।]

उत्तर 20:

पहले आलू को उठाकर बाल्टी में डालने तक दौड़ी गई दूरी $= 2 \times 5 = 10$
दूसरे आलू को उठाकर बाल्टी में डालने तक दौड़ी गई दूरी $= 2 \times (5 + 3) = 16$
इसप्रकार, प्रत्येक आलू को उठाकर लाने में तय दूरी की समांतर श्रेणी निम्नलिखित है:
$10, 16, 22, 28, \ldots$
यहाँ, $a = 10,\ d = 16 - 10 = 6$ तथा $n = 10$ है,
A.P. का n पदों तक का योग

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$\Rightarrow S_{10} = \frac{10}{2}[2(10) + (10-1)(6)]$
$= 5[20 + 54]$
$= 5(74) = 370\ m$
अतः, प्रतियोगी को कुल $370\ m$ दूरी दौड़नी पड़ेगी।