गणित

(पाठ – 5) (समांतर श्रेढ़ी)

(कक्षा 10)

प्रश्नावली 5.1

प्रश्न 1:

निम्नलिखित स्थितियों में से किन स्थितियों में संबद्ध संख्याओं की सूची A.P. है और क्यों?

(i) प्रत्येक किलो मीटर के बाद का टैक्सी का किराया, जबकि प्रथम किलो मीटर के लिए किराया ₹15 है और प्रत्येक अतिरिक्त किलो मीटर के लिए किराया ₹8 है।

(ii) किसी बेलन (cylinder) में उपस्थित हवा की मात्रा, जबकि वायु निकलने वाला पंप प्रत्येक बार बेलन की शेष हवा का $\frac{1}{4}$ भाग बहार निकाल देता है।

(iii) प्रत्येक मीटर की खुदाई के बाद, एक कुँआ खोदने में आई लागत, जबकि प्रथम मीटर खुदाई की लागत ₹150 है और बाद में प्रत्येक मीटर खुदाई की लागत ₹50 बढ़ती जाती है।

(iv) खाते में प्रत्येक वर्ष का मिश्रधन, जबकि ₹10000 की राशि 8% वार्षिक की दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर जमा की जाती है।

उत्तर 1:

(i) 1 किलो मीटर के लिए किराया $a_1 = ₹15$

2 किलो मीटर के लिए किराया $a_2 = ₹(15 + 8) = ₹23$

3 किलो मीटर के लिए किराया $a_3 = ₹(23 + 8) = ₹31$

4 किलो मीटर के लिए किराया $a_4 = ₹(31 + 8) = ₹39$

$a_2 - a_1 = 23 - 15 = 8$

$a_3 - a_2 = 31 - 23 = 8$

$a_4 - a_3 = 39 - 31 = 8$

क्रमागत पदों में अंतर समान है। अतः संख्याओं की सूची A.P. है।

(ii) माना, बेलन में उपस्थित हवा की मात्रा $a_1 = x$

पहली बार हवा निकलने के बाद बेलन में शेष हवा $a_2 = x - \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}x$

दूसरी बार हवा निकलने के बाद बेलन में शेष हवा $a_3 = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}x\right) = \frac{9}{14}x$

तीसरी बार हवा निकलने के बाद बेलन में शेष हवा $a_4 = \frac{9}{16}x - \frac{1}{4}\left(\frac{9}{16}x\right) = \frac{27}{64}x$

$$a_2 - a_1 = \frac{3}{4}x - x = -\frac{1}{4}x$$

$$a_3 - a_2 = \frac{9}{16}x - \frac{3}{4}x = -\frac{3}{16}x$$

$$a_4 - a_3 = \frac{27}{64}x - \frac{9}{16}x = -\frac{9}{64}x$$

क्रमागत पदों में अंतर समान नहीं है। अतः संख्याओं की सूची A.P. नहीं है।

(iii) 1 मीटर खुदाई की लागत $a_1 = ₹150$

2 मीटर खुदाई की लागत $a_2 = ₹(150 + 50) = ₹200$

3 मीटर खुदाई की लागत $a_3 = ₹(200 + 50) = ₹250$

4 मीटर खुदाई की लागत $a_4 = ₹(250 + 50) = ₹300$

$a_2 - a_1 = 200 - 150 = 50$

$a_3 - a_2 = 250 - 200 = 50$

$a_4 - a_3 = 300 - 250 = 50$

क्रमागत पदों में अंतर समान है। अतः संख्याओं की सूची A.P. है।

(iv) दर = 8% वार्षिक, मूलधन $a_1 = ₹10000$

1 वर्ष बाद मिश्रधन $a_2 = ₹10000\left(1 + \frac{8}{100}\right)^1 = ₹10800$

2 वर्ष बाद मिश्रधन $a_3 = ₹10800\left(1+\frac{8}{100}\right)^2 = ₹12597$
3 वर्ष बाद मिश्रधन $a_4 = ₹12597\left(1+\frac{8}{100}\right)^3 = ₹15869$
$a_2 - a_1 = ₹10800 - ₹10000 = ₹800$
$a_3 - a_2 = ₹12597 - ₹10800 = ₹1797$
$a_4 - a_3 = ₹15869 - ₹12597 = ₹3272$
क्रमागत पदों में अंतर समान नहीं है। अतः संख्याओं की सूची A.P. नहीं है।

प्रश्न 2:

दी हुई A.P. के प्रथम चार पद लिखिए, जबकि प्रथम पद a और सार्व अंतर d निम्नलिखित हैं:
(i) $a = 10, \quad d = 10$ **(ii)** $a = -2, \quad d = 0$
(iii) $a = 4, \quad d = -3$ **(iv)** $a = -1, \quad d = \frac{1}{2}$
(v) $a = -1.25, \quad d = -0.25$

उत्तर 2:

(i) $a = 10, \quad d = 10$
पहला पद $a_1 = a = 10$
दूसरा पद $a_2 = a_1 + d = 10 + 10 = 20$
तीसरा पद $a_3 = a_2 + d = 20 + 10 = 30$
चौथा पद $a_4 = a_3 + d = 30 + 10 = 40$

(ii) $a = -2, \quad d = 0$
पहला पद $a_1 = a = -2$
दूसरा पद $a_2 = a_1 + d = -2 + 0 = -2$
तीसरा पद $a_3 = a_2 + d = -2 + 0 = -2$
चौथा पद $a_4 = a_3 + d = -2 + 0 = -2$

(iii) $a = 4, \quad d = -3$
पहला पद $a_1 = a = 4$
दूसरा पद $a_2 = a_1 + d = 4 - 3 = 1$
तीसरा पद $a_3 = a_2 + d = 1 - 3 = -2$
चौथा पद $a_4 = a_3 + d = -2 - 3 = -5$

(iv) $a = -1, \quad d = \frac{1}{2}$
पहला पद $a_1 = a = -1$
दूसरा पद $a_2 = a_1 + d = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$
तीसरा पद $a_3 = a_2 + d = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$
चौथा पद $a_4 = a_3 + d = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(v) $a = -1.25, \quad d = -0.25$
पहला पद $a_1 = a = -1.25$
दूसरा पद $a_2 = a_1 + d = -1.25 - 0.25 = -1.50$
तीसरा पद $a_3 = a_2 + d = -1.50 - 0.25 = -1.75$
चौथा पद $a_4 = a_3 + d = -1.75 - 0.25 = -2.00$

प्रश्न 3:

निम्नलिखित में से प्रत्येक A.P. के लिए प्रथम पद तथा सार्व अंतर लिखिए:

(i) $3, 1, -1, -3, \ldots$ **(ii)** $-5, -1, 3, 7, \ldots$

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \ldots$ **(iv)** $0.6, 1.7, 2.8, 3.9, \ldots$

उत्तर 3:

(i) प्रथम पद $a = 3$
सार्व अंतर $d = a_2 - a_1 = 1 - 3 = -2$

(ii) प्रथम पद $a = -5$
सार्व अंतर $d = a_2 - a_1 = -1 - (-5) = 4$

(iii) प्रथम पद $a = \frac{1}{3}$
सार्व अंतर $d = a_2 - a_1 = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

(iv) प्रथम पद $a = 0.6$
सार्व अंतर $d = a_2 - a_1 = 1.7 - 0.6 = 1.1$

प्रश्न 4:

निम्नलिखित में से कौन-कौन A.P. हैं? यदि कोई A.P. है, तो इसका सार्व अंतर ज्ञात कीजिए और इनके तीन और पद लिखिए।

(i) $2, 4, 8, 16, \ldots$ **(ii)** $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$

(iii) $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2, \ldots$ **(iv)** $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(v) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \ldots$ **(vi)** $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, \ldots$

(vii) $0, -4, -8, -12, \ldots$ **(viii)** $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$

(ix) $1, 3, 9, 27, \ldots$ **(x)** $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$

(xi) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ **(xii)** $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots$

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots$ **(xiv)** $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \ldots$

(xv) $1^2, 5^2, 7^2, 73, \ldots$

उत्तर 4:

(i) $2, 4, 8, 16, \ldots$
$a_2 - a_1 = 4 - 2 = 2$
$a_3 - a_2 = 8 - 4 = 4$
$a_4 - a_3 = 16 - 8 = 8$
क्रमागत पदों में अंतर समान नहीं है। अतः संख्याओं की सूची A.P. नहीं है।

(ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$

$$a_2 - a_1 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$
$$a_3 - a_2 = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$
$$a_4 - a_3 = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$$

क्रमागत पदों में अंतर समान है। अतः संख्याओं की सूची A.P. है।
सार्व अंतर = $\frac{1}{2}$, इस A.P. के तीन और पद निम्नलिखित हैं:

पाँचवाँ पद $a_5 = a_4 + d = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4$
छठा पद $a_6 = a_5 + d = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$
सातवाँ पद $a_7 = a_6 + d = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5$

(iii) $-1.2, \ -3.2, \ -5.2, \ -7.2, \ldots$
$a_2 - a_1 = -3.2 - (-1.2) = -2.0$
$a_3 - a_2 = -5.2 - (-3.2) = -2.0$
$a_4 - a_3 = -7.2 - (-5.2) = -2.0$
क्रमागत पदों में अंतर समान है। अतः संख्याओं की सूची A.P. है।
सार्व अंतर = −2.0, इस A.P. के तीन और पद निम्नलिखित हैं:
पाँचवाँ पद $a_5 = a_4 + d = -7.2 - 2.0 = -9.2$
छठा पद $a_6 = a_5 + d = -9.2 - 2.0 = -11.2$
सातवाँ पद $a_7 = a_6 + d = -11.2 - 2.0 = -13.2$

(iv) $-10, -6, -2, 2, \ldots$
$a_2 - a_1 = -6 - (-10) = 4$
$a_3 - a_2 = -2 - (-6) = 4$
$a_4 - a_3 = 2 - (-2) = 4$
क्रमागत पदों में अंतर समान है। अतः संख्याओं की सूची A.P. है।
सार्व अंतर = 4, इस A.P. के तीन और पद निम्नलिखित हैं:
पाँचवाँ पद $a_5 = a_4 + d = 2 + 4 = 6$
छठा पद $a_6 = a_5 + d = 6 + 4 = 10$
सातवाँ पद $a_7 = a_6 + d = 10 + 4 = 14$

(v) $3, 3 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}, \ldots$
$a_2 - a_1 = 3 + \sqrt{2} - 3 = \sqrt{2}$
$a_3 - a_2 = 3 + 2\sqrt{2} - (3 + \sqrt{2}) = \sqrt{2}$
$a_4 - a_3 = 3 + 3\sqrt{2} - (3 + 2\sqrt{2}) = \sqrt{2}$
क्रमागत पदों में अंतर समान है। अतः संख्याओं की सूची A.P. है।
सार्व अंतर = 4, इस A.P. के तीन और पद निम्नलिखित हैं:
पाँचवाँ पद $a_5 = a_4 + d = 3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3 + 4\sqrt{2}$
छठा पद $a_6 = a_5 + d = 3 + 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3 + 5\sqrt{2}$
सातवाँ पद $a_7 = a_6 + d = 3 + 5\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3 + 6\sqrt{2}$

(vi) $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, \ldots$
$a_2 - a_1 = 0.22 - 0.2 = 0.02$
$a_3 - a_2 = 0.222 - 0.22 = 0.002$
$a_4 - a_3 = 0.2222 - 0.222 = 0.0002$
क्रमागत पदों में अंतर समान नहीं है। अतः संख्याओं की सूची A.P. नहीं है।

(vii) $0, -4, -8, -12, \ldots$
$a_2 - a_1 = -4 - 0 = -4$
$a_3 - a_2 = -8 - (-4) = -4$
$a_4 - a_3 = -12 - (-8) = -4$
क्रमागत पदों में अंतर समान है। अतः संख्याओं की सूची A.P. है।
सार्व अंतर = −4, इस A.P. के तीन और पद निम्नलिखित हैं:

पाँचवाँ पद $a_5 = a_4 + d = -12 - 4 = -16$
छठा पद $a_6 = a_5 + d = -16 - 4 = -20$
सातवाँ पद $a_7 = a_6 + d = -20 - 4 = -24$

(viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$
$a_2 - a_1 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$
$a_3 - a_2 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$
$a_4 - a_3 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$
क्रमागत पदों में अंतर समान है। अतः संख्याओं की सूची A.P. है।
सार्व अंतर = 0, इस A.P. के तीन और पद निम्नलिखित हैं:
पाँचवाँ पद $a_5 = a_4 + d = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$
छठा पद $a_6 = a_5 + d = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$
सातवाँ पद $a_7 = a_6 + d = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$

(ix) $1, 3, 9, 27, \ldots$
$a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$
$a_3 - a_2 = 9 - 3 = 6$
$a_4 - a_3 = 27 - 9 = 18$
क्रमागत पदों में अंतर समान नहीं है। अतः संख्याओं की सूची A.P. नहीं है।

(x) $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$
$a_2 - a_1 = 2a - a = a$
$a_3 - a_2 = 3a - 2a = a$
$a_4 - a_3 = 4a - 3a = a$
क्रमागत पदों में अंतर समान है। अतः संख्याओं की सूची A.P. है।
सार्व अंतर = a, इस A.P. के तीन और पद निम्नलिखित हैं:
पाँचवाँ पद $a_5 = a_4 + d = 4a + a = 5a$
छठा पद $a_6 = a_5 + d = 5a + a = 6a$
सातवाँ पद $a_7 = a_6 + d = 6a + a = 7a$

(xi) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$
$a_2 - a_1 = a^2 - a$
$a_3 - a_2 = a^3 - a^2$
$a_4 - a_3 = a^4 - a^3$
क्रमागत पदों में अंतर समान नहीं है। अतः संख्याओं की सूची A.P. नहीं है।

(xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots$
$a_2 - a_1 = \sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$
$a_3 - a_2 = \sqrt{18} - \sqrt{8} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$
$a_4 - a_3 = \sqrt{32} - \sqrt{18} = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}$
क्रमागत पदों में अंतर समान है। अतः संख्याओं की सूची A.P. है।
सार्व अंतर = $\sqrt{2}$, इस A.P. के तीन और पद निम्नलिखित हैं:

पाँचवाँ पद $a_5 = a_4 + d = \sqrt{32} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = 5\sqrt{2} = \sqrt{50}$
छठा पद $a_6 = a_5 + d = 5\sqrt{2} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2} = \sqrt{72}$
सातवाँ पद $a_7 = a_6 + d = 6\sqrt{2} + \sqrt{2} = 7\sqrt{2} = \sqrt{98}$

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots$
$a_2 - a_1 = \sqrt{6} - \sqrt{3}$
$a_3 - a_2 = \sqrt{9} - \sqrt{6} = 3 - \sqrt{6}$
$a_4 - a_3 = \sqrt{12} - \sqrt{9} = 2\sqrt{3} - 3$
क्रमागत पदों में अंतर समान नहीं है। अतः संख्याओं की सूची A.P. नहीं है।

(xiv) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \ldots$
$a_2 - a_1 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$
$a_3 - a_2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$
$a_4 - a_3 = 7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$
क्रमागत पदों में अंतर समान नहीं है। अतः संख्याओं की सूची A.P. नहीं है।

(xv) $1^2, 5^2, 7^2, 73, \ldots$
$a_2 - a_1 = 5^2 - 1^2 = 25 - 1 = 24$
$a_3 - a_2 = 7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$
$a_4 - a_3 = 73 - 7^2 = 73 - 49 = 24$
क्रमागत पदों में अंतर समान है। अतः संख्याओं की सूची A.P. है।
सार्व अंतर = 24, इस A.P. के तीन और पद निम्नलिखित हैं:
पाँचवाँ पद $a_5 = a_4 + d = 73 + 24 = 97$
छठा पद $a_6 = a_5 + d = 97 + 24 = 121$
सातवाँ पद $a_7 = a_6 + d = 121 + 24 = 145$