गणित

प्रश्नावली 4.1

प्रश्न 1:
जाँच कीजिए कि क्या निम्न द्विघात समीकरण हैं:

(i). $(x+1)^2 = 2(x-3)$
(ii). $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$
(iii). $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$
(iv). $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$
(v). $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$
(vi). $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$
(vii). $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$
(viii). $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$

उत्तर 1:

(i) $(x+1)^2 = 2(x-3)$
समीकरण को सरल करने पर
$(x+1)^2 = 2(x-3)$
$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 2x - 6$
$\Rightarrow x^2 + 7 = 0$
अर्थात $x^2 + 0x + 7 = 0$
यह $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का समीकरण है।
अतः, दिया गया समीकरण एक द्विघात समीकरण है।

(ii) $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$
समीकरण को सरल करने पर
$x^2 - 2x = (-2)(3-x)$
$\Rightarrow x^2 - 2x = -6 + 2x$
$\Rightarrow x^2 - 4x + 6 = 0$
अर्थात $x^2 - 4x + 6 = 0$
यह $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का समीकरण है।
अतः, दिया गया समीकरण एक द्विघात समीकरण है।

(iii) $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$
समीकरण को सरल करने पर
$(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$
$\Rightarrow x^2 - 2x + x - 2 = x^2 - x + 3x - 3$
$\Rightarrow -3x + 1 = 0$
अर्थात $3x - 1 = 0$
यह $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का समीकरण नहीं है।
अतः, दिया गया समीकरण एक द्विघात समीकरण नहीं है।

(iv) $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$
समीकरण को सरल करने पर
$(x-3)(2x+1) = x(x+5)$
$\Rightarrow 2x^2 - 6x + x - 3 = x^2 + 5x$
$\Rightarrow x^2 - 10x - 3 = 0$
अर्थात $x^2 - 10x - 3 = 0$
यह $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार का समीकरण है।
अतः दिया गया समीकरण एक द्विघात समीकरण है।

(v) $(2x-1)(x-3)=(x+5)(x-1)$
समीकरण को सरल करने पर
$(2x-1)(x-3)=(x+5)(x-1)$
$\Rightarrow 2x^2-x-6x+3=x^2+5x-x-5$
$\Rightarrow x^2-11x+8=0$
अर्थात $x^2-11x+8=0$
यह $ax^2+bx+c=0$ के प्रकार का समीकरण है।
अतः दिया गया समीकरण एक द्विघात समीकरण है।

(vi) $x^2+3x+1=(x-2)^2$
समीकरण को सरल करने पर
$x^2+3x+1=(x-2)^2$
$\Rightarrow x^2+3x+1=x^2-4x+4$
$\Rightarrow 7x-3=0$
अर्थात $7x-3=0$
यह $ax^2+bx+c=0$ के प्रकार का समीकरण नहीं है।
अतः दिया गया समीकरण एक द्विघात समीकरण नहीं है।

(vii) $(x+2)^3=2x(x^2-1)$
समीकरण को सरल करने पर
$(x+2)^3=2x(x^2-1)$
$\Rightarrow x^3+6x^2+12x+8=2x^3-2x$
$\Rightarrow -x^3+6x^2+14x+8=0$
अर्थात $x^3-6x^2-14x-8=0$
यह $ax^2+bx+c=0$ के प्रकार का समीकरण नहीं है।
अतः दिया गया समीकरण एक द्विघात समीकरण नहीं है।

(viii) $x^3-4x^2-x+1=(x-2)^3$
समीकरण को सरल करने पर
$x^3-4x^2-x+1=(x-2)^3$
$\Rightarrow x^3-4x^2-x+1=x^3-6x^2+12x-8$
$\Rightarrow 2x^2-13x+9=0$
अर्थात $2x^2-13x+9=0$
यह $ax^2+bx+c=0$ के प्रकार का समीकरण है।
अतः दिया गया समीकरण एक द्विघात समीकरण है।

प्रश्न 2:
निम्न स्थितियों को द्विघात समीकरणों के रूप में निरूपित कीजिए:
(i) एक आयताकार भूखंड का क्षेत्रफल 528 m^2 है। क्षेत्र की लंबाई (मीटरों में) चौड़ाई के दुगुने से एक अधिक है। हमें भूखंड की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात करनी है।
(ii) दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 306 है। हमें पूर्णांकों को ज्ञात करना है।
(iii) रोहन की माँ उससे 26 वर्ष बड़ी है। उनकी आयु (वर्षों में) का गुणनफल अब से तीन वर्ष पश्चात् 360 हो जाएगी। हमें रोहन की वर्तमान आयु ज्ञात करनी है।
(iv) एक रेलगाड़ी 480 km की दूरी समान चाल से तय करती है। यदि इसकी चाल 8 km/h कम होती, तो वह उसी दूरी को तय करने में 3 घंटे अधिक लेती। हमें रेलगाड़ी की चाल ज्ञात करनी है।

उत्तर 2:

(i) माना, भूखंड की चौड़ाई = x m
इसलिए, भूखंड की लम्बाई = $2x + 1$ m
अतः, क्षेत्रफल = $x(2x + 1)$ m^2
प्रश्नानुसार, $x(2x + 1) = 528$
$\Rightarrow 2x^2 + x = 528$
$\Rightarrow 2x^2 + x - 528 = 0$
अतः भूखंड की लम्बाई और चौड़ाई द्विघात समीकरण $2x^2 + x - 528 = 0$ संतुष्ट करती है।

(ii) माना, पहला पूर्णांक = x
इसलिए, दूसरा क्रमागत पूर्णांक = $x + 1$
अतः, गुणनफल = $x(x + 1)$
प्रश्नानुसार, $x(x + 1) = 306$
$\Rightarrow x^2 + x = 306$
$\Rightarrow x^2 + x - 306 = 0$
अतः दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांक द्विघात समीकरण $x^2 + x - 306 = 0$ संतुष्ट करती है।

(iii) माना, रोहन की आयु = x वर्ष
इसलिए, रोहन की माँ की आयु = $x + 26$ वर्ष
तीन वर्ष पश्चात,
रोहन की आयु = $x + 3$ वर्ष
इसलिए, रोहन की माँ की आयु = $x + 29$ वर्ष
अतः, आयु का गुणनफल = $(x + 3)(x + 29)$ वर्ष
प्रश्नानुसार, $(x + 3)(x + 29) = 360$
$\Rightarrow x^2 + 3x + 29x + 87 = 360$
$\Rightarrow x^2 + 32x - 273 = 0$
अतः रोहन की आयु द्विघात समीकरण $x^2 + x - 306 = 0$ संतुष्ट करती है।

(iv) माना, रेलगाड़ी की चाल = x km/h
कुल दूरी = 480 km
इसलिए, लिया गया समय = $\frac{480}{x}$ घंटे
यदि इसकी चाल 8 km/h कम होती, तो लिया गया समय = $\frac{480}{x-8}$ घंटे
प्रश्नानुसार,
$$\frac{480}{x-8} - \frac{480}{x} = 3$$
$$\Rightarrow \frac{480x - 480(x-8)}{(x-8)x} = 3$$
$\Rightarrow 480x - 480x + 3640 = 3(x - 8)x$
$\Rightarrow 3640 = 3x^2 - 24x$
$\Rightarrow 3x^2 - 24x - 3640 = 0$
अतः रेलगाड़ी की चाल द्विघात समीकरण $3x^2 - 24x - 3640 = 0$ संतुष्ट करती है।