प्रश्नावली 3.7 (ऐच्छिक)

प्रश्न 1:

दो मित्रों अनी और बीजू की आयु में 3 वर्ष का अंतर है। अनी के पिता धरम की आयु अनी की आयु की दुगुनी और बीजू की आयु अपनी बहन कैथी की आयु की दुगुनी है। कैथी और धरम की आयु का अंतर 30 वर्ष है। अनी और बीजू की आयु ज्ञात कीजिए।

उत्तर 1:

माना, अनी की वर्तमान आयु = x वर्ष

माना, बीजू की वर्तमान आयु = y वर्ष

प्रश्नानुसार,

$x = y + 3$ ... (1) [यदि अनी, बीजू से बड़ा है]

और $y = x + 3$ ... (2) [यदि बीजू, अनी से बड़ा है]

अनी के पिता धरम की आयु अनी की आयु की दुगुनी है। इसलिए

धरम की आयु = $2x$ वर्ष

बीजू की आयु अपनी बहन कैथी की आयु की दुगुनी है। इसलिए

कैथी की आयु = $\frac{y}{2}$ वर्ष

प्रश्नानुसार,

$2x - \frac{y}{2} = 30$ ... (3)

समीकरण (1) से x का मान रखने पर

$2(y+3) - \dfrac{y}{2} = 30 \quad \Rightarrow 4y + 12 - y = 60$

$\Rightarrow 3y = 48 \quad \Rightarrow y = 16$

समीकरण (1) में y का मान रखने पर

$x = 16 + 3 = 19$

अतः, अनी की वर्तमान आयु 19 वर्ष तथा बीजू की वर्तमान आयु 16 वर्ष है।

दूसरी स्थिति में, जब बीजू, अनी से बड़ा है,

समीकरण (2) से y का मान समीकरण (3) में रखने पर

$2x - \dfrac{x+3}{2} = 30$

$\Rightarrow 4x - x - 3 = 60$

$\Rightarrow 3x = 63 \quad \Rightarrow x = 21$

समीकरण (2) में x का मान रखने पर

$y = 21 + 3 = 24$

अतः, अनी की वर्तमान आयु 21 वर्ष तथा बीजू की वर्तमान आयु 24 वर्ष है।

प्रश्न 2:

एक मित्र दूसरे मित्र से कहता है कि 'यदि मुझे एक सौ दे दो, तो मैं आपसे दो गुना धनी बन जाऊँगा।' दूसरा उत्तर देता है 'यदि आप मुझे दस दे दें, तो मैं आपसे छः गुना धनी बन जाऊँगा।' बताइए कि उनकी क्रमशः क्या संपत्तियाँ हैं?

[**संकेत**: $x + 100 = 2(y - 100)$, $y + 10 = 6(x - 10)$]

उत्तर 2:

माना, पहले मित्र के पास रूपये = ₹x
माना, दूसरे मित्र के पास रूपये = ₹y
पहली शर्त के अनुसार,
$x + 100 = 2(y - 100)$
$\Rightarrow x = 2y - 300$ ... (1)

दूसरी शर्त के अनुसार,
$y + 10 = 6(x - 10)$
$y - 6x = -70$
समीकरण (1) से x का मान रखने पर
$y - 6(2y - 300) = -70 \quad \Rightarrow y - 12y + 1800 = -70$
$\Rightarrow -11y = -1870 \quad \Rightarrow y = 170$
समीकरण (1) में y का मान रखने पर
$x = 2(170) - 300 = 40$
अतः, एक मित्र के पास 170 रूपये तथा दूसरे मित्र के पास 40 रूपये हैं।

प्रश्न 3:

एक रेलगाड़ी कुछ दूरी समान चाल से तय करती है। यदि रेलगाड़ी 10 km/h अधिक तेज चलती होती, तो उसे नियत समय से 2 घंटे कम लगते और यदि रेलगाड़ी 10 km/h धीमी चलती होती, तो उसे नियत समय से 3 घंटे अधिक लगते। रेलगाड़ी द्वारा तय की गयी दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर 3:

माना, रेलगाड़ी की समान चाल = x km/h
माना, नियत दूरी = y km
इसलिए, नियत समय = $\frac{y}{x}$ घंटे
पहली शर्त के अनुसार, यदि रेलगाड़ी 10 km/h अधिक तेज चलती होती, तो उसे नियत समय से 2 घंटे कम लगते हैं।

$$\frac{y}{x+10} = \frac{y}{x} - 2$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} - \frac{y}{x+10} = 2 \quad \Rightarrow y\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+10}\right) = 2 \quad \Rightarrow y\left(\frac{x+10-x}{x(x+10)}\right) = 2$$

$\Rightarrow y = \frac{2}{10}(x^2 + 10x)$ ... (1)

दूसरी शर्त के अनुसार, यदि रेलगाड़ी 10 km/h धीमी चलती होती, तो उसे नियत समय से 3 घंटे अधिक लगते हैं।

$$\frac{y}{x-10} = \frac{y}{x} + 3$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x-10} - \frac{y}{x} = 3 \quad \Rightarrow y\left(\frac{1}{x-10} - \frac{1}{x}\right) = 3 \quad \Rightarrow y\left(\frac{x-x+10}{x(x-10)}\right) = 3$$

$\Rightarrow y = \frac{3}{10}(x^2 - 10x)$

समीकरण (1) से y का मान रखने पर

$\frac{2}{10}(x^2 + 10x) = \frac{3}{10}(x^2 - 10x) \quad \Rightarrow 2x^2 + 20x = 3x^2 - 30x$

$\Rightarrow x^2 = 50x \quad \Rightarrow x = 50$

समीकरण (1) में x का मान रखने पर

$y = \frac{2}{10}[(50)^2 + 10(50)] = 600$

अतः, रेलगाड़ी द्वारा तय की गयी दूरी 600 km है।

प्रश्न 4:

एक कक्षा के विद्यार्थियों को पंक्तियों में खड़ा होना है। यदि पंक्ति में 3 विद्यार्थी अधिक होते, तो 1 पंक्ति कम होती। यदि पंक्ति में 3 विद्यार्थी कम होते, तो 2 पंक्तियाँ अधिक बनतीं। कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर 4:

माना, पंक्तियों की संख्या = x

माना, एक पंक्ति में विद्यार्थियों की संख्या = y

इसलिए, कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या = xy

पहली शर्त के अनुसार, यदि पंक्ति में 3 विद्यार्थी अधिक होते, तो 1 पंक्ति कम होती।

$(x - 1)(y + 3) = xy$

$\Rightarrow xy + 3x - y - 3 = xy$

$\Rightarrow y = 3x - 3 \quad \ldots (1)$

दूसरी शर्त के अनुसार, यदि पंक्ति में 3 विद्यार्थी कम होते, तो 2 पंक्तियाँ अधिक बनतीं।

$(x + 2)(y - 3) = xy$

$\Rightarrow xy - 3x + 2y - 6 = xy$

$\Rightarrow -3x + 2y = 6$

समीकरण (1) से y का मान रखने पर

$-3x + 2(3x - 3) = 6 \quad \Rightarrow -3x + 6x - 6 = 6$

$\Rightarrow 3x = 12 \quad \Rightarrow x = 4$

समीकरण (1) में x का मान रखने पर

$y = 3(4) - 3 = 9$

कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या = $xy = (4)(9) = 36$

अतः, कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या 36 है।

प्रश्न 5:

एक ΔABC में, $\angle C = 3\angle B = 2(\angle A + \angle B)$ है। त्रिभुज के तीनों कोण ज्ञात कीजिए।

उत्तर 5:

माना, $\angle A = x$ और $\angle B = y$

इसलिए, $\angle C = 3y \quad [\because \angle C = 3\angle B]$

$3\angle B = 2(\angle A + \angle B)$

$\Rightarrow 3y = 2(x + y) \quad \Rightarrow y = 2x \quad \ldots (1)$

ΔABC में, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

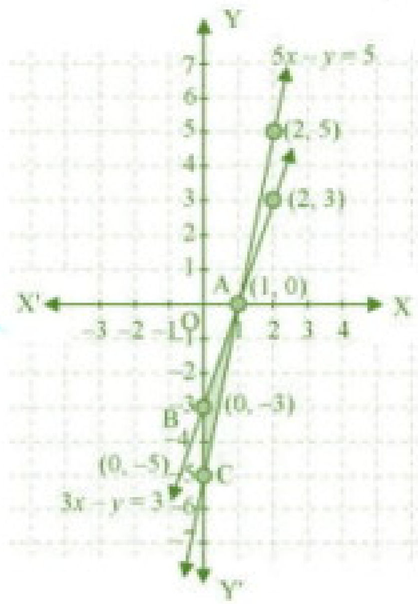
$\Rightarrow x + y + 3y = 180° \quad \Rightarrow x + 4y = 180°$

समीकरण (1) से y का मान रखने पर
$x + 4(2x) = 180° \quad \Rightarrow 9x = 180°$
$\Rightarrow x = 20°$
समीकरण (1) में x का मान रखने पर
$y = 2(20°) = 40°$
अतः, $\angle A = 20°$, $\angle B = 40°$ $\angle C = 120°$ है।

प्रश्न 6:

समीकरणों $5x - y = 5$ और $3x - y = 3$ के ग्राफ खींचिए। इन रेखाओं और y –अक्ष से बने त्रिभुज के शीर्षों के निर्देशांक ज्ञात कीजिए। इस प्रकार बने त्रिभुज के क्षेत्रफल का परिकलन कीजिए।

उत्तर 6:



$5x - y = 5$ ... (1)
$3x - y = 3$ ... (2)
प्रत्येक समीकरण के तीन हल के लिए
समीकरण (1) से
$y = 5x - 5$

x	0	1	2
y	−5	0	5

समीकरण (2) से
$y = 3x - 3$

x	0	1	2
y	−3	0	3

इन रेखाओं और y –अक्ष से बने ΔABC के शीर्षों के निर्देशांक $A(1, 0), B(0, -3)$ तथा $C(0, -5)$ हैं।
त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल
$= \frac{1}{2} \times BC \times OA$
$= \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$
अतः, त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल 1 वर्ग इकाई है।

प्रश्न 7:

निम्न रैखिक समीकरणों के युग्मों को हल कीजिए:
(i) $px + qy = p - q$; $qx - py = p + q$
(ii) $ax + by = c$; $bx + ay = 1 + c$
(iii) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$; $ax + by = a^2 + b^2$
(iv) $(a - b)x + (a + b)y = a^2 - 2ab - b^2$; $(a + b)(x + y) = a^2 + b^2$
(v) $152x - 378y = -74$; $-378x + 152y = -604$

उत्तर 7:

(i) $px + qy = p - q$ ... (1)
$qx - py = p + q$ ... (2)

समीकरण (2) को p से तथा समीकरण (1) को q से, गुणा करके घटाने पर

$$\begin{array}{r} pqx + q^2y = pq - q^2 \\ pqx - p^2y = p^2 + pq \\ - \quad + \qquad - \quad - \\ \hline (q^2 + p^2)y = -(p^2 + q^2) \end{array}$$

$$\Rightarrow y = -1$$

y का मान समीकरण (1) में रखने पर

$px + q(-1) = p - q \quad \Rightarrow px = p \quad \Rightarrow x = 1$

अतः, $x = 1$ तथा $y = -1$ है।

(ii) $ax + by = c$ ... (1)

$bx + ay = 1 + c$ ... (2)

समीकरण (2) को a से तथा समीकरण (1) को b से, गुणा करके घटाने पर

$$\begin{array}{r} abx + b^2y = bc \\ abx + a^2y = a + ac \\ - \quad - \qquad - \quad - \\ \hline (b^2 - a^2)y = bc - a - ac \end{array}$$

$$\Rightarrow y = \frac{bc - a - ac}{b^2 - a^2}$$

y का मान समीकरण (1) में रखने पर

$ax + b\left(\frac{bc - a - ac}{b^2 - a^2}\right) = c \quad \Rightarrow ax = c - \frac{b^2c - ab - abc}{b^2 - a^2}$

$\Rightarrow ax = \frac{b^2c - a^2c - b^2c + ab + abc}{b^2 - a^2}$

$\Rightarrow x = \frac{-ac + b + bc}{b^2 - a^2}$

अतः, $x = \frac{-ac+b+bc}{b^2-a^2}$ तथा $y = \frac{bc-a-ac}{b^2-a^2}$ है।

(iii) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ ... (1)

$ax + by = a^2 + b^2$ ... (2)

समीकरण (1) से

$x = \frac{ay}{b}$ ... (3)

समीकरण (2) में x का मान रखने पर

$a\left(\frac{ay}{b}\right) + by = a^2 + b^2$

$\Rightarrow a^2y + b^2y = a^2b + b^3$

$\Rightarrow y(a^2 + b^2) = b(a^2 + b^2)$

$\Rightarrow y = b$

y का मान समीकरण (3) में रखने पर

$x = \frac{a(b)}{b} = a$

अतः, $x = a$ तथा $y = b$ है।

(iv) $(a-b)x+(a+b)y=a^2-2ab-b^2$ ... (1)
$(a+b)(x+y)=a^2+b^2 \quad \Rightarrow (a+b)x+(a+b)y=a^2+b^2$ ... (2)
समीकरण (2) को समीकरण (1) से घटाने पर

$$\begin{array}{l} (a-b)x+(a+b)y=a^2-2ab-b^2 \\ (a+b)x+(a+b)y=a^2+b^2 \\ - \quad\quad - \quad\quad\quad - \quad - \\ \hline (a-b-a-b)x=-2ab-2b^2 \\ \Rightarrow -2bx=-2b(a+b) \\ \Rightarrow x=a+b \end{array}$$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर
$(a-b)(a+b)+(a+b)y=a^2-2ab-b^2$
$\Rightarrow a^2-b^2+(a+b)y=a^2-2ab-b^2$
$\Rightarrow (a+b)y=-2ab$
$\Rightarrow y=\frac{-2ab}{a+b}$
अतः, $x=a+b$ तथा $y=-\frac{2ab}{a+b}$ है।

(v) $152x-378y=-74$ ... (1)
$-378x+152y=-604$ ... (2)
समीकरण (2) को समीकरण (1) से घटाने पर

$$\begin{array}{l} 152x-378y=-74 \\ -378x+152y=-604 \\ + \quad\quad - \quad\quad\quad + \\ \hline 530x-530y=530 \end{array}$$

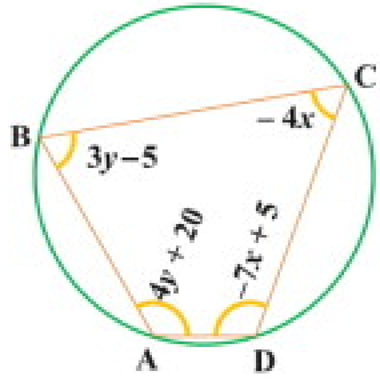
$\Rightarrow x-y=1$
$\Rightarrow x=1+y$ ... (3)

x का मान समीकरण (1) में रखने पर
$152(1+y)-378y=-74$
$\Rightarrow 152+152y-378y=-74$
$\Rightarrow -226y=-226$
$\Rightarrow y=1$

y का मान समीकरण (3) में रखने पर
$x=1+1=2$
अतः, $x=2$ तथा $y=1$ है।

प्रश्न 8:

ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है (देखिए आकृति)। इस चक्रीय चतुर्भुज के कोण ज्ञात कीजिए।



उत्तर 8:

चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक होते हैं। इसलिए

$\angle A + \angle C = 180°$ ... (1)

$\angle B + \angle D = 180°$ ... (2)

समीकरण (1) से

$4y + 20 - 4x = 180$

$\Rightarrow y - x = 40$

$\Rightarrow y = 40 + x$ ... (3)

समीकरण (2) से

$3y - 5 - 7x + 5 = 180$

$\Rightarrow 3y - 7x = 180$

समीकरण (3) से y का मान रखने पर

$3(40 + x) - 7x = 180$

$\Rightarrow 120 + 3x - 7x = 180$

$\Rightarrow -4x = 60$

$\Rightarrow x = -15$

x का मान समीकरण (3) में रखने पर

$y = 40 + (-15) = 25$

अतः,

$\angle A = 4y + 20 = 4(25) + 20 = 120°$

$\angle B = 3y - 5 = 3(25) - 5 = 70°$

$\angle C = -4x = -4(-15) = 60°$

$\angle D = -7x + 5 = -7(-15) + 5 = 110°$