गणित

(www.tiwariacademy.com)

(पाठ – 3) (दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म)

(कक्षा 10)

प्रश्नावली 3.5

प्रश्न 1:

निम्न रैखिक समीकरणों के युग्मों में से किसका एक अद्वितीय हल है, किसका कोई हल नहीं है या किसके अपरिमित रूप से अनेक हल हैं। अद्वितीय हल की स्थिति में, उसे व्रज-गुणन विधि से ज्ञात कीजिए।

(i) $x-3y-3=0\,;\ 3x-9y-2=0$

(ii) $2x+y=5\,;\ 3x+2y=8$

(iii) $3x-5y=20\,;\ \ 6x-10y=40$

(iv) $x-3y-7=0\,;\ 3x-3y-15=0$

उत्तर 1:

(i) $x-3y-3=0$ ... (1)

$3x-9y-2=0$ ... (2)

यहाँ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{1}{3}$, $\frac{b_1}{b_2}=\frac{-3}{-9}=\frac{1}{3}$ और $\frac{c_1}{c_2}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$

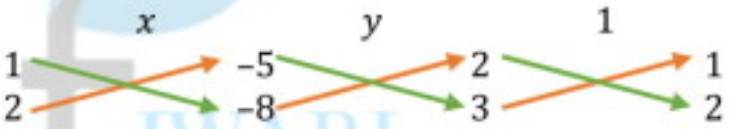
$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$, इसलिए समीकरण युग्म का कोई हल नहीं है।

(ii) $2x+y-5=0$ ... (1)

$3x+2y-8=0$ ... (2)

यहाँ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{2}{3}$ और $\frac{b_1}{b_2}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$, इसलिए समीकरण युग्म का एक अद्वितीय हल है।



व्रज-गुणन विधि से,

$$\frac{x}{1\times(-8)-2\times(-5)}=\frac{y}{(-5)\times3-(-8)\times2}=\frac{1}{2\times2-3\times1}$$

$\Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{1}{1}$

$\Rightarrow x=2$ तथा $y=1$

अतः, $x=2$ तथा $y=1$ है।

(iii) $3x-5y-20=0$ ... (1)

$6x-10y-40=0$ ... (2)

यहाँ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\frac{b_1}{b_2}=\frac{-5}{-10}=\frac{1}{2}$ और $\frac{c_1}{c_2}=\frac{-20}{-40}=\frac{1}{2}$

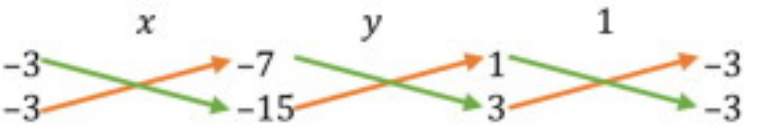
$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$, इसलिए समीकरण युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल हैं।

(v) $x-3y-7=0$ ... (1)

$3x-3y-15=0$ ... (2)

यहाँ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{1}{3}$ और $\frac{b_1}{b_2}=\frac{-3}{-3}=\frac{1}{1}$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, इसलिए समीकरण युग्म का एक अद्वितीय हल है।



व्रज-गुणन विधि से,

$$\frac{x}{(-3)\times(-15)-(-3)\times(-7)} = \frac{y}{(-7)\times 3-(-15)\times 1} = \frac{1}{1\times(-3)-3\times(-3)}$$

$\Rightarrow \frac{x}{24} = \frac{y}{-6} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow x = 4$ तथा $y = -1$

अतः, $x = 4$ तथा $y = -1$ है।

प्रश्न 2:

(i) a और b के किन मानों के लिए, निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे?

$$2x + 3y = 7$$
$$(a-b)x + (a+b)y = 3a + b - 2$$

(ii) k के किस मान के लिए, निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म का कोई नहीं है?

$$3x + y = 1$$
$$(2k-1)x + (k-1)y = 2k + 1$$

उत्तर 2:

(i) $2x + 3y = 7$ ... (1)

$(a-b)x + (a+b)y = 3a + b - 2$ ... (2)

यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{a-b}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{a+b}$ और $\frac{c_1}{c_2} = \frac{7}{3a+b-2}$

रैखिक समीकरणों के युग्म के अपरिमित रूप से अनेक हल होंगे, यदि

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$\Rightarrow \frac{2}{a-b} = \frac{3}{a+b} = \frac{7}{3a+b-2}$

$\Rightarrow \frac{2}{a-b} = \frac{3}{a+b}$ और $\frac{3}{a+b} = \frac{7}{3a+b-2}$

$\Rightarrow 2(a+b) = 3(a-b)$ और $3(3a+b-2) = 7(a+b)$

$\Rightarrow 2a + 2b = 3a - 3b$ और $9a + 3b - 6 = 7a + 7b$

$\Rightarrow a = 5b$ और $2a = 4b + 6$

हल करने पर

$\Rightarrow a = 5$ और $b = 1$

प्रश्न 3:

निम्न रैखिक समीकरणों के युग्म को प्रतिस्थापन एवं व्रज-गुणन विधियों से हल कीजिए। किस विधि को आप अधिक उपयुक्त मानते हैं?

$$8x + 5y = 9$$
$$3x + 2y = 4$$

उत्तर 3:

प्रतिस्थापन विधि से हल:

$8x + 5y = 9$ ... (1)

$3x + 2y = 4$ ... (2)

समीकरण (1) से

$y = \frac{9-8x}{5}$ ... (3)

समीकरण (2) में y का मान रखने पर

$3x + 2\left(\frac{9-8x}{5}\right) = 4$

$\Rightarrow 15x + 18 - 16x = 20$

$\Rightarrow -x = 2 \quad \Rightarrow x = -2$

x का मान समीकरण (3) में रखने पर

$y = \frac{9-8(-2)}{5} = 5$

अतः, $x = -2$ तथा $y = 5$ है।

व्रज-गुणन विधि से हल:

$8x + 5y - 9 = 0$ ... (1)

$3x + 2y - 4 = 0$ ... (2)

व्रज-गुणन विधि से,

$$\frac{x}{5\times(-4)-2\times(-9)} = \frac{y}{(-9)\times 3-(-4)\times 8} = \frac{1}{8\times 2-3\times 5}$$

$\Rightarrow \frac{x}{-2} = \frac{y}{5} = \frac{1}{1}$

$\Rightarrow x = -2$ तथा $y = 5$

अतः, $x = -2$ तथा $y = 5$ है।

प्रश्न 4:

निम्न समस्याओं में रैखिक समीकरणों के युग्म बनाइए और उनके हल (यदि उनका अस्तित्व हो) किसी बीजगणितीय विधि से ज्ञात कीजिए:

(i) एक छात्रावास के मासिक व्यय का एक भाग नियत है तथा शेष इस पर निर्भर करता है कि छात्र ने कितने दिन भोजन लिया है। जब एक विद्यार्थी A को, जो 20 दिन भोजन करता है, ₹1000 छात्रावास के व्यय के लिए अदा करने पड़ते हैं, जबकि एक विद्यार्थी B को, जो 26 दिन भोजन करता है छात्रावास के व्यय के लिए ₹1180 अदा करने पड़ते हैं। नियत व्यय और प्रतिदिन के भोजन का मूल्य ज्ञात कीजिए।

(ii) एक भिन्न $\frac{1}{3}$ हो जाती है, जब उसके अंश से 1 घटाया जाता है और वह $\frac{1}{4}$ हो जाती है, जब हर में 8 जोड़ दिया जाता है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए।

(iii) यश ने एक टेस्ट में 40 अंक अर्जित किए, जब उसे प्रत्येक सही उत्तर पर 3 अंक मिले तथा अशुद्ध उत्तर पर 1 अंक की कटौती की गई। यदि उसे सही उत्तर पर 4 अंक मिलते तथा अशुद्ध उत्तर पर 2 अंक कटते, तो यश 50 अंक अर्जित करता। टेस्ट में कितने प्रश्न थे?

(iv) एक राजमार्ग पर दो स्थान A और B, $100\ km$ की दूरी पर हैं। एक कार A से तथा दूसरी कार B से एक ही समय चलना प्रारम्भ करती है। यदि ये कारें भिन्न-भिन्न चालों से एक ही दिशा में चलती हैं, तो वे 5 घंटे पश्चात मिलती हैं। यदि ये कारें विपरीत दिशा (एक दूसरे की ओर) में चलती हैं, तो वे 1 घंटे पश्चात मिलती हैं। दोनों कारों की चाल ज्ञात कीजिए।

(v) एक आयत का क्षेत्रफल 9 वर्ग इकाई कम हो जाता है, यदि उसकी लंबाई 5 इकाई कम कर दी जाती है और चौड़ाई 3 इकाई बढ़ा दी जाती है। यदि हम लंबाई को 3 इकाई और चौड़ाई को 2 इकाई बढ़ा दें, तो क्षेत्रफल 67 वर्ग इकाई बढ़ जाता है। आयत की विमाएँ ज्ञात कीजिए।

उत्तर 4:

(i) माना, मासिक व्यय का भाग नियत भाग = ₹ x

माना, प्रतिदिन के भोजन का मूल्य = ₹ y

जब विद्यार्थी 20 दिन भोजन करता है, ₹1000 छात्रावास के व्यय के लिए अदा करने पड़ते हैं।

इसलिए,

$x + 20y = 1000$

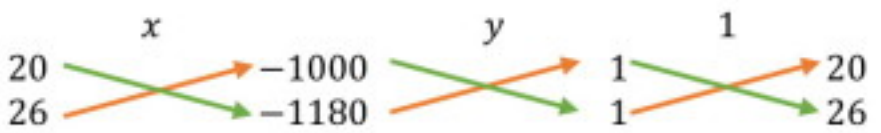
$\Rightarrow x + 20y - 1000 = 0$ ... (1)

जब विद्यार्थी 26 दिन भोजन करता है, छात्रावास के व्यय के लिए ₹1180 अदा करने पड़ते हैं।

इसलिए,

$x + 26y = 1180$

$\Rightarrow x + 26y - 1180 = 0$ ... (2)



व्रज-गुणन विधि से,

$$\frac{x}{20 \times (-1180) - 26 \times (-1000)} = \frac{y}{(-1000) \times 1 - (-1180) \times 1} = \frac{1}{1 \times 26 - 1 \times 20}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-23600 + 26000} = \frac{y}{-1000 + 1180} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2400} = \frac{y}{180} = \frac{1}{6}$$

$\Rightarrow x = 400$ तथा $y = 30$

अतः, मासिक व्यय का भाग नियत भाग ₹400 तथा प्रतिदिन के भोजन का मूल्य ₹30 है।

(ii) माना, अंश = x

माना, हर = y

इसलिए, परिमेय संख्या = $\frac{x}{y}$

पहली शर्त के अनुसार

$$\frac{x-1}{y}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3x-3=y$$

$$\Rightarrow 3x-y-3=0 \qquad \ldots(1)$$

दूसरी शर्त के अनुसार

$$\frac{x}{y+8}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 4x=y+8$$

$$\Rightarrow 4x-y-8=0 \qquad \ldots(2)$$

व्रज-गुणन विधि से,

$$\frac{x}{(-1)\times(-8)-(-1)\times(-3)}=\frac{y}{(-3)\times 4-(-8)\times 3}=\frac{1}{3\times(-1)-4\times(-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{8-3}=\frac{y}{-12+24}=\frac{1}{-3+4}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{5}=\frac{y}{12}=\frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow x=5 \quad \text{तथा} \quad y=12$$

अतः, परिमेय संख्या = $\frac{x}{y}=\frac{5}{12}$ है।

(iii) माना, सही उत्तरों की संख्या = x

माना, अशुद्ध उत्तरों की संख्या = y

इसलिए, पहली शर्त के अनुसार

$$3x-y=40$$

$$\Rightarrow 3x-y-40=0 \qquad \ldots(1)$$

दूसरी शर्त के अनुसार

$$4x-2y=50$$

$$\Rightarrow 4x-2y-50=0 \qquad \ldots(2)$$

व्रज-गुणन विधि से,

$$\frac{x}{(-1)\times(-50)-(-2)\times(-40)}=\frac{y}{(-40)\times 4-(-50)\times 3}=\frac{1}{3\times(-2)-4\times(-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{50-80} = \frac{y}{-160+150} = \frac{1}{-6+4}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-30} = \frac{y}{-10} = \frac{1}{-2}$$

$\Rightarrow x = 15$ तथा $y = 5$

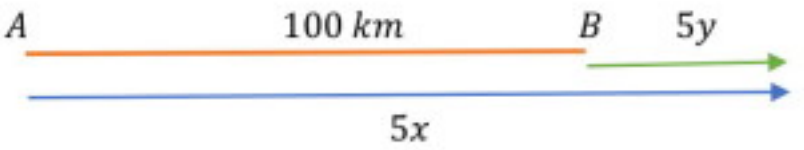
कुल प्रश्नों की संख्या $= x + y = 15 + 5 = 20$

अतः, टेस्ट में कुल 20 प्रश्न थे।

(iv) माना, स्थान A से चलने वाली कार की चाल = $x\ km/h$

माना, स्थान B से चलने वाली कार की चाल = $y\ km/h$

पाँच घंटे के बाद,



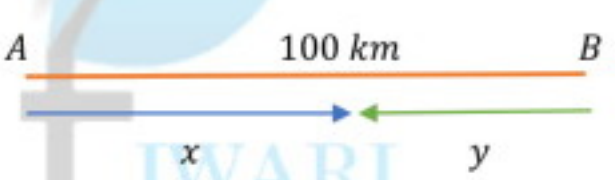
कार A द्वारा चली गई दूरी = $5x\ \ km$

कार B द्वारा चली गई दूरी = $5y\ \ km$

इसलिए, $5x - 5y = 100$

$\Rightarrow x - y - 20 = 0$ ... (1)

यदि ये कारें विपरीत दिशा (एक दूसरे की ओर) में चलती हैं, तो वे 1 घंटे पश्चात मिलती हैं। 1 घंटे पश्चात,



कार A द्वारा चली गई दूरी = $x\ \ km$

कार B द्वारा चली गई दूरी = $y\ \ km$

इसलिए, $x + y = 100$

$\Rightarrow x + y - 100 = 0$ ... (2)

व्रज-गुणन विधि से,

$$\frac{x}{(-1)\times(-100) - 1\times(-20)} = \frac{y}{(-20)\times 1 - (-100)\times 1} = \frac{1}{1\times 1 - 1\times(-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{100+20} = \frac{y}{-20+100} = \frac{1}{1+1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{120} = \frac{y}{80} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow x = 60$ तथा $y = 40$

अतः, स्थान A से चलने वाली कार की चाल 60 km/h तथा स्थान A से चलने वाली कार की चाल 40 km/h है।

(v) माना, आयत की लंबाई = x इकाई

माना, आयत की चौड़ाई = y इकाई

इसलिए, आयत का क्षेत्रफल = xy वर्ग इकाई

यदि उसकी लंबाई 5 इकाई कम कर दी जाती है और चौड़ाई 3 इकाई बढ़ा दी जाती है। तो

क्षेत्रफल = $(x-5)(y+3)$ वर्ग इकाई

प्रश्न के अनुसार

$(x-5)(y+3) = xy - 9$

$\Rightarrow xy + 3x - 5y - 15 = xy - 9$

$\Rightarrow 3x - 5y - 6 = 0 \quad \ldots(1)$

यदि हम लंबाई को 3 इकाई और चौड़ाई को 2 इकाई बढ़ा दें, तो क्षेत्रफल 67 वर्ग इकाई बढ़ जाता है। इसलिए,

$(x+3)(y+2) = xy + 67$

$\Rightarrow xy + 2x + 3y + 6 = xy + 67$

$\Rightarrow 2x + 3y - 61 = 0 \quad \ldots(2)$

व्रज-गुणन विधि से,

$$\frac{x}{(-5)\times(-61) - 3\times(-6)} = \frac{y}{(-6)\times 2 - (-61)\times 3} = \frac{1}{3\times 3 - 2\times(-5)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{305+18} = \frac{y}{-12+183} = \frac{1}{9+10}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{323} = \frac{y}{171} = \frac{1}{19}$$

$\Rightarrow x = 17$ तथा $y = 9$

अतः, आयत की लंबाई 17 इकाई तथा चौड़ाई 9 इकाई है।