प्रश्नावली 2.4

प्रश्न 1:

सत्यापित कीजिए कि निम्न त्रिघात बहुपदों के साथ दी गई संख्याएँ उसकी शून्यक हैं। प्रत्येक स्थिति में शून्यांकों और गुणांकों के बीच संबंध को भी सत्यापित कीजिए:

(i). $2x^3 + x^2 - 5x + 2;\ \frac{1}{2}, 1, -2$ **(ii).** $x^3 - 4x^2 + 5x - 2;\quad 2, 1, 1$

उत्तर 1:

(i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2;\ \frac{1}{2}, 1, -2$

माना $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

इसलिए, $p\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{2}\right) + 2$

$= 2 \times \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 5 \times \frac{1}{2} + 2$

$= \frac{2}{4} - \frac{5}{2} + 2$

$= \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0$

इसलिए, $\frac{1}{2}$, $p(x)$ का शून्यक है।

अब, $p(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 5(1) + 2$

$= 2 \times 1 + 1 - 5 \times 1 + 2$

$= 3 - 5 + 2$

$= 5 - 5 = 0$

इसलिए, 1, $p(x)$ का शून्यक है।

अब, $p(-2) = 2(-2)^3 + (-2)^2 - 5(-2) + 2$

$= 2 \times (-8) + 4 + 10 + 2$

$= -16 + 4 + 10 + 2$

$= -16 + 16 = 0$

इसलिए, -2, $p(x)$ का शून्यक है।

इसप्रकार, $\frac{1}{2}, 1$ और -2, $p(x)$ के शून्यक हैं।

अब, माना $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = 1$ तथा $\gamma = -2$

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2} + 1 + (-2) = \frac{3-4}{2} = \frac{-1}{2} = \frac{-(1)}{2} = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{1}{2} \times 1 + 1 \times (-2) + (-2) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 2 - 1 = \frac{-5}{2} = \frac{-5}{2} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2} \times 1 \times (-2) = -1 = \frac{-2}{2} = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

इसप्रकार, शून्यांकों और गुणांकों के बीच संबंध सत्यापित हुआ।

(ii) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2;\quad 2, 1, 1$

माना $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

इसलिए, $p(2) = (2)^3 - 4(2)^2 + 5(2) - 2 = 8 - 16 + 10 - 2 = 18 - 18 = 0$

इसलिए, 2, $p(x)$ का शून्यक है।

अब, $p(1) = (1)^3 - 4(1)^2 + 5(1) - 2$
$= 1 - 4 + 5 - 2$
$= 6 - 6 = 0$
इसलिए, 1, $p(x)$ का शून्यक है।
इसप्रकार, 2, 1 और 1, $p(x)$ के शून्यक हैं।
अब, माना $\alpha = 2, \beta = 1$ तथा $\gamma = 1$

$$\alpha + \beta + \gamma = 2 + 1 + 1 = 4 = \frac{-(-1)}{1} = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 2 = 2 + 1 + 2 = 5 = \frac{5}{1} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta\gamma = 2 \times 1 \times 1 = 2 = \frac{-(-2)}{1} = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

इसप्रकार, शून्यांकों और गुणांकों के बीच संबंध सत्यापित हुआ।

प्रश्न 2:
एक त्रिघात बहुपद प्राप्त कीजिए जिसके शून्याकों का योग, दो शून्याकों को एक साथ लेकर उनके गुणनफलों का योग तथा तीनों शून्याकों के गुणनफल क्रमशः 2, −7, −14 हों।

उत्तर 2:
माना $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ एक त्रिघात बहुपद है और α, β तथा γ बहुपद के शून्याक हैं
दिया है,
$\alpha + \beta + \gamma = 2$
$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -7$
$\alpha\beta\gamma = -14$
हम जानते हैं कि,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}, \quad \alpha\beta\gamma = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

इसलिए,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}} = \frac{-b}{a} = \frac{2}{1}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}} = \frac{c}{a} = \frac{-7}{1}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}} = \frac{-d}{a} = \frac{-14}{1}$$

तुलना करने पर, $a = 1, b = -2, c = -7$ और $d = 14$

अतः, त्रिघात बहुपद $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ अर्थात $p(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + 14$ होगा।

प्रश्न 3:

यदि बहुपद $x^3 - 3x^2 + x + 1$ के शून्यक $a - b,\ a,\ a + b$ हों, तो a और b ज्ञात कीजिए।

उत्तर 3:

हम जानते हैं कि,

$$\text{मूलों का योगफल} = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

इसलिए,

$$(\mathrm{a} - \mathrm{b}) + \mathrm{a} + (\mathrm{a} + \mathrm{b}) = \frac{-(-3)}{1}$$

$\Rightarrow 3a = 3$

$\Rightarrow a = 1$

$$\text{मूलों का गुणनफल} = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

इसलिए,

$$(\mathrm{a} - \mathrm{b})(\mathrm{a})(\mathrm{a} + \mathrm{b}) = \frac{-(1)}{1}$$

$\Rightarrow (1 - \mathrm{b})1(1 + \mathrm{b}) = -1$ [क्योंकि $a = 1$]

$\Rightarrow 1 - b^2 = -1$

$\Rightarrow b^2 = 2 \quad \Rightarrow b = \pm\sqrt{2}$

इस प्रकार, $a = 1$ और $b = \pm\sqrt{2}$

प्रश्न 4:

यदि बहुपद $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 13x - 35$ के दो शून्यक $2 \pm \sqrt{3}$ हों, तो अन्य शून्यक ज्ञात कीजिए।

उत्तर 4:

माना $p(x) = x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 13x - 35$

दिया है, $2 + \sqrt{3}$ और $2 - \sqrt{3}$ बहुपद $p(x)$ के दो शून्यक हैं

इसलिए, $(x - 2 - \sqrt{3})$ और $(x - 2 + \sqrt{3})$ बहुपद $p(x)$ के दो गुणनखंड हैं।

इसलिए, $(x - 2)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2$ बहुपद $p(x)$ का गुणनखंड है।

अर्थात $x^2 - 4x + 1$ बहुपद $p(x)$ का गुणनखंड है।

[क्योंकि$(x - 2)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = x^2 - 4x + 1$]

इसप्रकार,

$p(x) = x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 13x - 35$

$= (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x - 35)$

$= (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 7x + 5x - 35)$

$= (x^2 - 4x + 1)[x(x - 7) + 5(x - 7)]$

$= (x^2 - 4x + 1)(x + 5)(x - 7)$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 2x - 35 \\
\hline
x^2 - 4x + 1 & x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35 \\
 & x^4 - 4x^3 + x^2 \\
 & - \quad + \quad - \\
\hline
 & -2x^3 - 27x^2 + 138x - 35 \\
 & -2x^3 + 8x^2 - 2x \\
 & + \quad - \quad + \\
\hline
 & -35x^2 + 140x - 35 \\
 & -35x^2 + 140x - 35 \\
 & + \quad - \quad + \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

अन्य शून्यक प्राप्त करने के लिए $x + 5 = 0$ और $x - 7 = 0$ रखने पर, $x = -5$ और $x = 7$

इसप्रकार, अन्य शून्यक $x = -5$ और $x = 7$ हैं।

प्रश्न 5:

यदि बहुपद $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ को एक अन्य बहुपद $x^2 - 2x + k$ से भाग दिया जाए और शेषफल $x + a$ आता हो, तो k तथा a ज्ञात कीजिए।

उत्तर 5:

दिया है

भाजक $= x^2 - 2x + k$

भाज्य $= x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$

शेषफल $= x + a$

हम जानते हैं कि

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

इसलिए,

$x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10 = (x^2 - 2x + k) \times$ भागफल $+ (x + a)$

$x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10 - (x + a) = (x^2 - 2x + k) \times$ भागफल

$\Rightarrow \dfrac{x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 26x + 10 - a}{x^2 - 2x + k} =$ भागफल

इसप्रकार, यदि बहुपद $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 26x + 10 - a$ को बहुपद $x^2 - 2x + k$ से भाग दिया जाए तो शेषफल 0 होगा।

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 4x + (8 - k) \\
\hline
x^2 - 2x + k & x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 26x + 10 - a \\
 & x^4 - 2x^3 + kx^2 \\
 & - \quad + \quad - \\
\hline
 & -4x^3 + (16 - k)x^2 - 26x \\
 & -4x^3 + 8x^2 - 4kx \\
 & + \quad - \quad + \\
\hline
 & (8 - k)x^2 - (26 - 4k)x + 10 - a \\
 & (8 - k)x^2 - (16 - 2k)x + (8k - k^2) \\
 & - \quad + \quad - \\
\hline
 & (-10 + 2k)x + (10 - a - 8k + k^2)
\end{array}
$$

तुलना करने पर,

$-10 + 2k = 0$

$\Rightarrow 2k = 10$

$\Rightarrow k = 5$

और

$10 - a - 8k + k^2 = 0$

$\Rightarrow 10 - a - 8 \times 5 + 5^2 = 0$ [क्योंकि $k = 5$]

$\Rightarrow 10 - a - 40 + 25 = 0$

$\Rightarrow -a - 5 = 0$

$\Rightarrow a = -5$

इस प्रकार, $k = 5$ और $a = -5$