गणित

(www.tiwariacademy.com)

(पाठ – 2) (बहुपद)

(कक्षा 10)

प्रश्नावली 2.3

प्रश्न 1:

विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करके, निम्न में $p(x)$ को $g(x)$ से भाग देने पर भागफल तथा शेषफल ज्ञात कीजिए:

(i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3,\ g(x) = x^2 - 2$

(ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5,\ g(x) = x^2 + 1 - x$

(iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6,\ g(x) = 2 - x^2$

उत्तर 1:

(i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3,\ g(x) = x^2 - 2$

इसप्रकार,

भागफल $= x - 2$

तथा शेषफल $= 7x - 9$ है ।

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 - 2 & x^3 - 3x^2 + 5x - 3 \quad (x - 3 \\
\hline
 & x^3 \quad\quad - 2x \\
 & - \quad\quad + \\
\hline
 & -3x^2 + 7x - 3 \\
 & -3x^2 \quad\quad + 6 \\
 & + \quad\quad - \\
\hline
 & 7x - 9
\end{array}
$$

(ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5,\ g(x) = x^2 + 1 - x$

इसप्रकार,

भागफल $= x^2 + x - 3$

तथा शेषफल $= 8$ है ।

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 - x + 1 & x^4 + 0.x^3 - 3x^2 + 4x + 5 \quad (x^2 + x - 3 \\
\hline
 & x^4 - \ x^3 + x^2 \\
 & - \ + \quad - \\
\hline
 & x^3 - 4x^2 + 4x + 5 \\
 & x^3 - \ x^2 + \ x \\
 & - \quad + \quad - \\
\hline
 & -3x^2 + 3x + 5 \\
 & -3x^2 + 3x - 3 \\
 & + \quad - \quad + \\
\hline
 & 8
\end{array}
$$

(iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6,\ g(x) = 2 - x^2$

इसप्रकार,

भागफल $= -x^2 - 2$

तथा शेषफल $= -5x + 10$ है ।

$$
\begin{array}{r|l}
-x^2 + 2 & x^4 + 0.x^2 - 5x + 6 \quad (-x^2 - 2 \\
\hline
 & x^4 - 2x^2 \\
 & - \quad + \\
\hline
 & 2x^2 - 5x + 6 \\
 & 2x^2 \quad\quad - 4 \\
 & - \quad\quad + \\
\hline
 & -5x + 10
\end{array}
$$

प्रश्न 2:

पहले बहुपद से दूसरे बहुपद को भाग करके, जाँच कीजिए कि क्या प्रथम बहुपद द्वितीय बहुपद का एक गुणनखंड है:

(i) $t^2-3,\ 2t^4+3t^3-2t^2-9t-12$

(ii) $x^2+3x+1,\ 3x^4+5x^3-7x^2+2x+2$

(iii) $x^3-3x+1,\ x^5-4x^3+x^2+3x+1$

उत्तर 2:

(i) $t^2-3,\ 2t^4+3t^3-2t^2-9t-12$

क्योंकि शेषफल 0 है, इसलिए

बहुपद t^2-3 बहुपद $2t^4+3t^3-2t^2-9t-12$ का एक गुणनखंड है।

$$
\begin{array}{r|l}
t^2+0t-3 & 2t^2+3t+4 \\
\hline
 & 2t^4+3t^3-2t^2-9t-12 \\
 & 2t^4+0t^3-6t^2 \\
 & \quad - \quad - \quad + \\
\hline
 & \quad 3t^3+4t^2-9t-12 \\
 & \quad 3t^3+0t^2-9t \\
 & \quad \quad - \quad - \quad + \\
\hline
 & \quad \quad 4t^2+0t-12 \\
 & \quad \quad 4t^2+0t-12 \\
 & \quad \quad \quad - \quad - \quad + \\
\hline
 & \quad \quad \quad 0 \\
\hline
\end{array}
$$

(ii) $x^2+3x+1,\ 3x^4+5x^3-7x^2+2x+2$

क्योंकि शेषफल 0 है, इसलिए

बहुपद x^2+3x+1 बहुपद $3x^4+5x^3-7x^2+2x+2$ का एक गुणनखंड है।

$$
\begin{array}{r|l}
x^2+3x+1 & 3x^2-4x+2 \\
\hline
 & 3x^4+5x^3-7x^2+2x+2 \\
 & 3x^4+9x^3+3x^2 \\
 & \quad - \quad - \quad - \\
\hline
 & \quad -4x^3-10x^2+2x+2 \\
 & \quad -4x^3-12x^2-4x \\
 & \quad \quad + \quad + \quad + \\
\hline
 & \quad \quad \quad 2x^2+6x+2 \\
 & \quad \quad \quad 2x^2+6x+2 \\
\hline
 & \quad \quad \quad 0 \\
\hline
\end{array}
$$

(iii) $x^3-3x+1,\ x^5-4x^3+x^2+3x+1$

क्योंकि शेषफल 0 नहीं है, इसलिए

बहुपद x^3-3x+1 बहुपद $x^5-4x^3+x^2+3x+1$ का गुणनखंड नहीं है।

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-3x+1 & x^2-1 \\
\hline
 & x^5-4x^3+x^2+3x+1 \\
 & x^5-3x^3+x^2 \\
 & \quad - \quad + \quad - \\
\hline
 & \quad -x^3 \quad +3x+1 \\
 & \quad -x^3 \quad +3x-1 \\
 & \quad + \quad - \quad + \\
\hline
 & \quad \quad \quad 2 \\
\hline
\end{array}
$$

प्रश्न 3:

$3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ के अन्य सभी शून्यक ज्ञात कीजिए, यदि इसके दो शून्यक $\sqrt{\frac{5}{3}}$ और $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ हैं।

उत्तर 3:

माना $p(x) = 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$

इस प्रकार, $\sqrt{\frac{5}{3}}$ और $-\sqrt{\frac{5}{3}}$, $p(x)$ के शून्यक हैं ।

इसलिए, $\left(x - \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ और $\left(x + \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$, $p(x)$ के गुणनखंड हैं ।

या $x^2 - \frac{5}{3}$, $p(x)$ का गुणनखंड है।

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 + 0.x - \frac{5}{3} & 3x^2 + 6x + 3 \\
\cline{2-2}
 & 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5 \\
 & 3x^4 + 0x^3 - 5x^2 \\
 & \quad - \quad - \quad + \\
\hline
 & 6x^3 + 3x^2 - 10x - 5 \\
 & 6x^3 + 0x^2 - 10x \\
 & \quad - \quad - \quad + \\
\hline
 & 3x^2 + 0x - 5 \\
 & 3x^2 + 0x - 5 \\
 & \quad - \quad - \quad + \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5 = \left(x^2 - \frac{5}{3}\right)\left(3x^2 + 6x + 3\right)$$

$$= 3\left(x^2 - \frac{5}{3}\right)\left(x^2 + 2x + 1\right)$$

इस प्रकार,

$p(x) = 3\left(x^2 - \frac{5}{3}\right)(x^2 + 2x + 1)$

$= 3\left(x^2 - \frac{5}{3}\right)[x^2 + x + x + 1]$

$= 3\left(x^2 - \frac{5}{3}\right)[x(x + 1) + 1(x + 1)]$

$= 3\left(x^2 - \frac{5}{3}\right)(x + 1)(x + 1)$

इसलिए, $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ के शून्यक $\sqrt{\frac{5}{3}}$, $-\sqrt{\frac{5}{3}}$, -1 और -1 हैं।

प्रश्न 4:

यदि $x^3 - 3x^2 + x + 2$ को एक बहुपद $g(x)$ से भाग देने पर, भागफल और शेषफल क्रमशः $x - 2$ और $-2x + 4$ हैं तो $g(x)$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर 4:

दिया है

भाजक $= g(x)$

भागफल $= x - 2$

भाज्य $= x^3 - 3x^2 + x + 2$

शेषफल $= -2x + 4$

हम जानते हैं कि

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

इसलिए,

$x^3 - 3x^2 + x + 2 = g(x) \times (x - 2) - (-2x + 4)$

$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + x + 2 - (-2x + 4) = g(x) \times (x - 2)$

$$\Rightarrow \frac{x^3 - 3x^2 + x + 2 - (-2x + 4)}{(x - 2)} = g(x)$$

इस प्रकार, $g(x) = x^2 - x + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
x-2 & x^2 - x + 1 \\
\cline{2-2}
 & x^3 - 3x^2 + 3x - 2 \\
 & x^3 - 2x^2 \\
 & - \quad + \\
\hline
 & -x^2 + 3x - 2 \\
 & -x^2 + 2x \\
 & + \quad - \\
\hline
 & x - 2 \\
 & x - 2 \\
 & - \quad + \\
\hline
 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

प्रश्न 5:

बहुपदों $p(x)$, $g(x)$, $q(x)$ और $r(x)$ के ऐसे उदाहरण दीजिए जो विभाजन अल्गोरिथम को संतुष्ट करते हों तथा

(i) घात $p(x) =$ घात $q(x)$ **(ii)** घात $q(x) =$ घात $r(x)$ **(iii)** घात $r(x) = 0$

उत्तर 5:

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से $p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$, जहाँ $q(x) \neq 0$,

घात $r(x) = 0$ या घात $r(x) <$ घात $g(x)$

(i) घात $p(x) =$ घात $q(x)$

भाज्य और भागफल की घात तभी बराबर हो सकती है जब भाजक एक अचर (घात 0 हो) संख्या हो।

इसलिए,

माना $p(x) = 3x^2 - 6x + 5$

माना $g(x) = 3$

इस प्रकार $q(x) = x^2 - 2x + 1$ और $r(x) = 2$

(ii) घात $q(x) =$ घात $r(x)$

माना $p(x) = 2x^2 - 4x + 3$

माना $g(x) = x^2 - 2x + 1$

इस प्रकार $q(x) = 2$ और $r(x) = 1$

(iii) घात $r(x) = 0$

माना $p(x) = 2x^2 - 4x + 3$

माना $g(x) = x^2 - 2x + 1$

इस प्रकार $q(x) = 2$ और $r(x) = 1$