प्रश्नावली 2.2

प्रश्न 1:

निम्न द्विघात बहुपदों के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों तथा गुणांकों के बीच संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए:

(i). $x^2 - 2x - 8$ **(ii).** $4s^2 - 4s + 1$ **(iii).** $6x^2 - 3 - 7x$

(iv). $4u^2 + 8u$ **(v).** $t^2 - 15$ **(vi).** $3x^2 - x - 4$

उत्तर 1:

(i) $x^2 - 2x - 8$

हम पाते हैं:

$x^2 - 2x - 8$

$= x^2 - 4x + 2x - 8$

$= x(x - 4) + 2(x - 4)$

$= (x + 2)(x - 4)$

इसलिए , $x^2 - 2x - 8$ का मान शून्य है, जब $x + 2 = 0$ है या $x - 4 = 0$ है,

अर्थात जब $x = -2$ या $x = 4$ हो।

इसलिए, $x^2 - 2x - 8$ के शून्यक -2 और 4 हैं। अब

शून्यकों का योग $= -2 + 4 = 2 = \frac{-(-2)}{1} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यकों का गुणनफल $= (-2) \times 4 = -8 = \frac{-8}{1} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

(ii) $4s^2 - 4s + 1$

हम पाते हैं:

$4s^2 - 4s + 1$

$= 4s^2 - 2s - 2s + 1$

$= 2s(2s - 1) - 1(2s - 1)$

$= (2s - 1)(2s - 1)$

इसलिए, $4s^2 - 4s + 1$ का मान शून्य है, जब $2s - 1 = 0$ है,

अर्थात जब $s = \frac{1}{2}$ हो।

इसलिए, $4s^2 - 4s + 1$ के शून्यक $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{2}$ हैं। अब

शून्यकों का योग $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = \frac{-(4)}{4} = \frac{-(s \text{ का गुणांक})}{s^2 \text{ का गुणांक}}$

शून्यकों का गुणनफल $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{\text{अचर पद}}{s^2 \text{ का गुणांक}}$

(iii) $6x^2 - 3 - 7x$

हम पाते हैं:

$6x^2 - 3 - 7x$

$= 6x^2 - 7x - 3$

$= 6x^2 - 9x + 2x - 3$

$= 3x(2x - 3) + 1(2x - 3)$

$= (3x + 1)(2x - 3)$

इसलिए ,$6x^2 - 7x - 3$ का मान शून्य है, जब $3x + 1 = 0$ है या $2x - 3 = 0$ है,
अर्थात जब $x = -\frac{1}{3}$ या $x = \frac{3}{2}$ हो।

इसलिए, $6x^2 - 7x - 3$ के शून्यक $-\frac{1}{3}$ और $\frac{3}{2}$ हैं। अब

$$\text{शून्यकों का योग} = -\frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{-2+9}{6} = \frac{7}{6} = \frac{-(-7)}{6} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = \left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} = \frac{-3}{6} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

(iv) $4u^2 + 8u$

हम पाते हैं:

$4u^2 + 8u$

$= 4u^2 + 8u$

$= 4u(u + 2)$

इसलिए, $4u^2 + 8u$ का मान शून्य है, जब $4u = 0$ है या $u + 2 = 0$ है,
अर्थात जब $u = 0$ या $u = -2$ हो।

इसलिए, $4u^2 + 8u$ के शून्यक 0 और -2 हैं। अब

$$\text{शून्यकों का योग} = 0 + (-2) = -2 = \frac{-(8)}{4} = \frac{-(u \text{ का गुणांक})}{u^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = 0 \times (-2) = 0 = \frac{0}{4} = \frac{\text{अचर पद}}{u^2 \text{ का गुणांक}}$$

(v) $t^2 - 15$

हम पाते हैं:

$t^2 - 15 \;\; = t^2 - (\sqrt{15})^2$

$= (t + \sqrt{15})(t - \sqrt{15})$

इसलिए, $t^2 - 15$ का मान शून्य है, जब $t + \sqrt{15} = 0$ है या $t - \sqrt{15} = 0$ है,
अर्थात जब $x = -\sqrt{15}$ या $x = \sqrt{15}$ हो।

इसलिए, $t^2 - 15$ के शून्यक $-\sqrt{15}$ और $\sqrt{15}$ हैं। अब

$$\text{शून्यकों का योग} = -\sqrt{15} + \sqrt{15} = 0 = \frac{-(0)}{1} = \frac{-(t \text{ का गुणांक})}{t^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = (-\sqrt{15}) \times \sqrt{15} = -15 = \frac{-15}{1} = \frac{\text{अचर पद}}{t^2 \text{ का गुणांक}}$$

(vi) $3x^2 - x - 4$
हम पाते हैं:
$= 3x^2 - x - 4$
$= 3x^2 - 4x + 3x - 4$
$= x(3x - 4) + 1(3x - 4)$
$= (3x - 4)(x + 1)$
इसलिए ,$3x^2 - x - 4$ का मान शून्य है, जब $3x - 4 = 0$ है या $x + 1 = 0$ है,
अर्थात जब $x = \frac{4}{3}$ या $x = -1$ हो।
इसलिए, $3x^2 - x - 4$ के शून्यक $\frac{4}{3}$ और -1 हैं। अब

$$\text{शून्यकों का योग} = \frac{4}{3} + (-1) = \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3} = \frac{-(-1)}{3} = \frac{-(x \text{ का गुणांक})}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

$$\text{शून्यकों का गुणनफल} = \frac{4}{3} \times (-1) = -\frac{4}{3} = \frac{-4}{3} = \frac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

प्रश्न 2:

एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके शून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः दी गई संख्याएं हैं:

(i). $\frac{1}{4}, -1$ **(ii).** $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ **(iii).** $0, \sqrt{5}$
(iv). $1, 1$ **(v).** $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ **(vi).** $4, 1$

उत्तर 2:

(i) माना कोई द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β है।
हम पाते हैं:

$$\alpha + \beta = \frac{1}{4} = \frac{-b}{a}$$
$$\alpha\beta = -1 = \frac{-4}{4} = \frac{c}{a}$$

तुलना करने पर,

$$a = 4,\ b = -1 \text{ और } c = -4$$

अतः, वह द्विघात बहुपद, जिसमे दी गई शर्तें संतुष्ट होती हैं, $4x^2 - x - 4$ है।

(ii) माना कोई द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β है।
हम पाते हैं:

$$\alpha + \beta = \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \frac{-b}{a}$$
$$\alpha\beta = \frac{1}{3} = \frac{c}{a}$$

तुलना करने पर,

$$a = 3,\ b = -3\sqrt{2} \text{ और } c = 1$$

अतः, वह द्विघात बहुपद, जिसमे दी गई शर्तें संतुष्ट होती हैं, $3x^2 - 3\sqrt{2}x + 1$ है।

(iii) माना कोई द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β है।
हम पाते हैं:

$$\alpha + \beta = 0 = \frac{0}{1} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta = \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \frac{c}{a}$$

तुलना करने पर,

$$a = 1,\ b = 0 \text{ और } c = \sqrt{5}$$

अतः, वह द्विघात बहुपद, जिसमे दी गई शर्तें संतुष्ट होती हैं, $x^2 + 0.x + \sqrt{5}$ है।

(iv) माना कोई द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β है।
हम पाते हैं:

$$\alpha + \beta = 1 = \frac{1}{1} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta = 1 = \frac{1}{1} = \frac{c}{a}$$

तुलना करने पर,

$$a = 1,\ b = -1 \text{ और } c = 1$$

अतः, वह द्विघात बहुपद, जिसमे दी गई शर्तें संतुष्ट होती हैं, $x^2 - x + 1$ है।

(v) माना कोई द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β है।
हम पाते हैं:

$$\alpha + \beta = \frac{-1}{4} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta = \frac{1}{4} = \frac{c}{a}$$

तुलना करने पर,

$$a = 4,\ b = 1 \text{ और } c = 1$$

अतः, वह द्विघात बहुपद, जिसमे दी गई शर्तें संतुष्ट होती हैं, $4x^2 + x + 1$ है।

(vi) माना कोई द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ है और इसके शून्यक α और β है।
हम पाते हैं:

$$\alpha + \beta = 4 = \frac{4}{1} = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta = 1 = \frac{1}{1} = \frac{c}{a}$$

तुलना करने पर,

$$a = 1,\ b = -4 \text{ और } c = 1$$

अतः, वह द्विघात बहुपद, जिसमे दी गई शर्तें संतुष्ट होती हैं, $x^2 - 4x + 1$ है।