प्रश्नावली 1.3

प्रश्न 1:

सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उत्तर 1:

माना कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए, माना

$$\sqrt{5} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$a = \sqrt{5}b$

$\Rightarrow a^2 = 5b^2$ ....(1)

अतः, 5, a^2 को विभाजित करता है।

इसलिए, 5, a को विभाजित करेगा। ....(2)

अब, माना, $a = 5k$, जहाँ k कोई पूर्णांक है।

समीकरण (1) में a मान रखने पर,

$$(5k)^2 = 5b^2$$
$$\Rightarrow 5k^2 = b^2$$

अतः, 5, b^2 को विभाजित करता है।

इसलिए, 5, b को विभाजित करेगा। ....(3)

इसप्रकार, समीकरण (2) और (3) से, हमें यह पता चलता है कि a और b का उभयनिष्ठ गुणनखंड 5 है। जो हमारी कल्पना (a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है) के विपरीत है।

यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 2:

सिद्ध कीजिए कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उत्तर 2:

माना कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए, माना

$$3 + 2\sqrt{5} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$$3 + 2\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{5} = \frac{a}{b} - 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - 3\right)$$

क्योंकि a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - 3\right)$ एक परिमेय संख्या है। इसलिए, $\sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

परन्तु हम जानते हैं कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्न 3:

सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अपरिमेय हैं:

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(ii)** $7\sqrt{5}$ **(iii)** $6 + \sqrt{2}$

उत्तर 3:

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

माना कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है।

इसलिए, माना

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b} \quad \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{b}{a}$

$\Rightarrow 2a^2 = b^2$ ....(1)

अतः, 2, b^2 को विभाजित करता है।

इसलिए, 2, b को विभाजित करेगा। ....(2)

अब, माना, $b = 2k$, जहाँ k कोई पूर्णांक है।

समीकरण (1) में b मान रखने पर,

$$2a^2 = (2k)^2$$
$$\Rightarrow a^2 = 2k^2$$

अतः, 2, a^2 को विभाजित करता है।

इसलिए, 2, a को विभाजित करेगा। ....(3)

इसप्रकार, समीकरण (2) और (3) से, हमें यह पता चलता है कि a और b का उभयनिष्ठ गुणनखंड 2 है। जो हमारी कल्पना (a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है) के विपरीत है।

यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(ii) $7\sqrt{5}$

माना कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।
इसलिए, माना

$$7\sqrt{5} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$$7\sqrt{5} = \frac{a}{b}$$
$$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{a}{7b}$$

क्योंकि a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $\frac{a}{7b}$ एक परिमेय संख्या है। इसलिए, $\sqrt{5}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।
परन्तु हम जानते हैं कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $7\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(iii) $6 + \sqrt{2}$

माना कि $6 + \sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।
इसलिए, माना

$$6 + \sqrt{2} = \frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

जहाँ a और b पूर्णांक हैं तथा a और b में, 1 के अतिरिक्त, कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है।

$$6 + \sqrt{2} = \frac{a}{b}$$
$$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{b} - 6 = \frac{a - 6b}{b}$$

क्योंकि a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $\frac{a-6b}{b}$ एक परिमेय संख्या है। इसलिए, $\sqrt{2}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।
परन्तु हम जानते हैं कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। यह विरोधाभास हमारी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण हुआ है कि $6 + \sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। अतः, $6 + \sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।