गणित

(www.tiwariacademy.com)
(पाठ – 1) (वास्तविक संख्याएँ)
(कक्षा 10)
प्रश्नावली 1.1

प्रश्न 1:

निम्नलिखित संख्याओं का HCF ज्ञात करने के लिए यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कीजिए:
(i) 135 और 225 **(ii)** 196 और 38220 **(iii)** 867 और 255

उत्तर 1:

(i) 135 और 225

क्योंकि 225 > 135, यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग 225 और 135 में करने पर, हमें प्राप्त होता है

$225 = 135 \times 1 + 90$

क्योंकि शेष $90 \neq 0$, यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग 135 और 90 में करने पर, हमें प्राप्त होता है

$135 = 90 \times 1 + 45$

अब हमारे पास नया भाजक 90 और शेष 45, यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग इस में करने पर, हमें प्राप्त होता है

$90 = 2 \times 45 + 0$

क्योंकि शेष शून्य है, इस प्रक्रिया को यहीं रोक देते हैं

क्योंकि इस समय भाजक 45 है, इसलिए, 135 और 225 का HCF 45 है

(ii) 196 और 38220

क्योंकि 38220 > 196, यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग 38220 और 196 में करने पर, हमें प्राप्त होता है

$38220 = 196 \times 195 + 0$

क्योंकि शेष शून्य है, इस प्रक्रिया को यहीं रोक देते हैं

क्योंकि इस समय भाजक 196 है, इसलिए, 196 और 38220 का HCF 196 है

(iii) 867 और 255

क्योंकि 867 > 255, यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग 867 और 255 में करने पर, हमें प्राप्त होता है

$867 = 255 \times 3 + 102$

क्योंकि शेष 102 ≠ 0, यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग 255 और 102 में करने पर, हमें प्राप्त होता है

$255 = 102 \times 2 + 51$

अब हमारे पास नया भाजक 102 और शेष 51, यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग इस में करने पर, हमें प्राप्त होता है

$102 = 51 \times 2 + 0$

क्योंकि the शेष शून्य है, इस प्रक्रिया को यहीं रोक देते हैं

क्योंकि इस समय भाजक 51 है, इसलिए, 867 और 255 का HCF 51 है।

प्रश्न 2:

दर्शाइए कि कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $6q + 1$ या $6q + 3$ या $6q + 5$ के रूप का होता है, जहाँ q कोई पूर्णांक है।

उत्तर 2:

माना कोई धनात्मक पूर्णांक a है और $b = 6$।

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से, $a = 6q + r$ जहाँ $q \geq 0$, और $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ क्योंकि $0 \leq r < 6$।

इसलिए, $a = 6q$ या $6q + 1$ या $6q + 2$ या $6q + 3$ या $6q + 4$ या $6q + 5$।

अब,

$6q + 1 = 2 \times 3q + 1 = 2k_1 + 1$, जहाँ k_1 एक पूर्णांक है

$6q + 3 = (6q + 2) + 1 = 2(3q + 1) + 1 = 2k_2 + 1$, जहाँ k_2 एक पूर्णांक है।

$6q + 5 = (6q + 4) + 1 = 2(3q + 2) + 1 = 2k_3 + 1$, जहाँ k_3 एक पूर्णांक है।

इसप्रकार,

$6q + 1$, $6q + 3$, $6q + 5$ सभी $2k + 1$ के रूप में हैं, जहाँ k एक पूर्णांक है।

इसलिए, $6q + 1$, $6q + 3$, $6q + 5$ सभी 2 से विभाजित नहीं हैं।

इस प्रकार, ये सभी विषम पूर्णांक हैं और इसलिए, कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $6q + 1$ या $6q + 3$ या $6q + 5$ के रूप का होता है।

प्रश्न 3:

किसी परेड में 616 सदस्यों वाली एक सेना की टुकड़ी को 32 सदस्यों वाले एक आर्मी बैंड के पीछे मार्च करना है. दोनों समूहों को सामान संख्या वाले स्तम्भों में मार्च करना है. उन स्तम्भों की अधिकतम संख्या क्या है, जिसमे वे मार्च कर सकते हैं?

उत्तर 3:

उन स्तम्भों की अधिकतम संख्या HCF (616, 32) से प्राप्त होगी।

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग 616 और 32 में करने पर, हमें प्राप्त होता है

$616 = 32 \times 19 + 8$

$32 = 8 \times 4 + 0$

इस प्रकार 616 और 32 का HCF 8 है।

इसलिए, वे 8 के स्तम्भों में मार्च कर सकते।

प्रश्न 4:

यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग, किसी पूर्णांक m के लिए 3m या 3m + 1 के रूप का होता है।
[**संकेत**: यह मन लीजिए x कोई धनात्मक पूर्णांक है। तब, यह 3q, 3q + 1 या 3q + 2 के रूप में लिखा जा सकता है। इसमें से प्रत्येक का वर्ग कीजिए और दर्शाइए कि इन वर्गों को 3m या 3m + 1 के रूप में लिखा जा सकता है।]

उत्तर 4:

माना कोई धनात्मक पूर्णांक a है और $b = 3$।

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से $a = 3q + r$ जहाँ $q \geq 0$ और $r = 0, 1, 2$ क्योंकि $0 \leq r < 3$

इसलिए, $a = 3q$ या $3q + 1$ या $3q + 2$

$$a^2 = (3q)^2 \text{ या } (3q+1)^2 \text{ या } (3q+2)^2$$

$$= (3q)^2 \text{ या } 9q^2 + 6q + 1 \text{ या } 9q^2 + 12q + 4$$

$$= 3 \times (3q^2) \text{ या } 3 \times (3q^2 + 2q) + 1 \text{ या } 3 \times (3q^2 + 4q + 1) + 1$$

$$= 3k_1 \text{ या } 3k_2 + 1 \text{ या } 3k_3 + 1$$

जहाँ k_1, k_2, और k_3 धनात्मक पूर्णांक हैं।

इस प्रकार, प्रत्येक का वर्ग को 3m या 3m + 1 के रूप में लिखा जा सकता है।

प्रश्न 5:

यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का घन 9m, 9m + 1 या 9m + 8 के रूप में होता है।

उत्तर 5:

मन कोई धनात्मक पूर्णांक है और $b = 3$

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म से $a = 3q + r$, जहाँ $q \geq 0$ और $0 \leq r < 3$

इसलिए, $a = 3q$ या $3q + 1$ या $3q + 2$

जब $a = 3q$,

$a^3 = (3q)^3 = 27q^3 = 9(3q^3) = 9m$

जहाँ m एक पूर्णांक है और $m = 3q^3$

जब $a = 3q + 1$,

$a^3 = (3q + 1)^3$

$a^3 = 27q^3 + 27q^2 + 9q + 1$

$a^3 = 9(3q^3 + 3q^2 + q) + 1$

$a^3 = 9m + 1$

जहाँ m एक पूर्णांक है और $m = (3q^3 + 3q^2 + q)$

जब $a = 3q + 2$,

$a^3 = (3q + 2)^3$

$a^3 = 27q^3 + 54q^2 + 36q + 8$

$a^3 = 9(3q^3 + 6q^2 + 4q) + 8$

$a^3 = 9m + 8$

जहाँ m एक पूर्णांक है और $m = (3q^3 + 6q^2 + 4q)$

इसलिए, किसी धनात्मक पूर्णांक का घन 9m, 9m + 1 या 9m + 8 के रूप में होता है।