# गणित

(www.tiwariacademy.com)
(पाठ - 14) (सांख्यिकी)
(कक्षा 10)

## प्रश्नावली 14.3

**प्रश्न 1:**

निम्नलिखित बारंबारता बंटन किसी मोहल्ले के 68 उपभोक्ताओं की बिजली की मासिक खपत दर्शाता है। इन आँकड़ों के माध्यक, माध्य और बहुलक ज्ञात कीजिए। इनकी तुलना कीजिए।

| मासिक खपत (इकाइयों में) | उपभोक्ताओं की संख्या |
|---|---|
| 65 – 85 | 4 |
| 85 – 105 | 5 |
| 105 – 125 | 13 |
| 125 – 145 | 20 |
| 145 – 165 | 14 |
| 165 – 185 | 8 |
| 185 – 205 | 4 |

**उत्तर 1:**

प्रत्येक वर्ग-अन्तराल के लिए वर्ग चिन्ह $(x_i)$ ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करेंगे:

$$\text{वर्ग चिन्ह } x_i = \frac{\text{उपरि वर्ग सीमा } + \text{निचली वर्ग सीमा}}{2}$$

यहाँ, 135 को कल्पित माध्य $(a)$ लेकर, $d_i$, $u_i$ और $f_iu_i$ का मान निम्नलिखित से प्राप्त कर सकते हैं:

| मासिक खपत (इकाइयों में) | उपभोक्ताओं की संख्या $(f_i)$ | वर्ग चिन्ह $x_i$ | $d_i = x_i - 135$ | $u_i = \frac{di}{20}$ | $f_iu_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 65 – 85 | 4 | 75 | – 60 | – 3 | –12 |
| 85 – 105 | 5 | 95 | – 40 | – 2 | – 10 |
| 105 – 125 | 13 | 115 | – 20 | – 1 | – 13 |
| 125 – 145 | 20 | 135 | 0 | 0 | 0 |
| 145 – 165 | 14 | 155 | 20 | 1 | 14 |
| 165 – 185 | 8 | 175 | 40 | 2 | 16 |
| 185 – 205 | 4 | 195 | 60 | 3 | 12 |
| **योग** | **68** | | | | **7** |

यहाँ, सारणी से हमें निम्नलिखित मान प्राप्त होते हैं:

$\sum f_i = 68, \sum f_i u_i = 7, a = 135$ और $h = 20$

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) h = 135 + \left(\frac{7}{68}\right) \times 20 = 135 + 2.058 = 137.058$$

यहाँ, ये स्पष्ट है कि सबसे अधिक बारंबारता 20 है जो कि वर्ग 125 – 145 में है। इसलिए बहुलक वर्ग 125 – 145 है।

बहुलक वर्ग की निम्न सीमा $(l) = 125$, बहुलक वर्ग की बारंबारता $(f_1) = 20$ और वर्गमाप $(h) = 20$

बहुलक वर्ग से ठीक पहले आने वाले वर्ग की बारंबारता $(f_0) = 13$

बहुलक वर्ग से ठीक बाद में आने वाले वर्ग की बारंबारता $(f_2) = 14$

$$\text{बहुलक } = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h = 125 + \left(\frac{20 - 13}{2 \times 20 - 13 - 14}\right) \times 20 = 125 + \frac{7}{13} \times 20 = 125 + 10.76 = 135.76$$

माध्यक ज्ञात करने के लिए, संचयी बारंबारताओं के साथ बारंबारता बंटन सरणी निम्नलिखित है:

| मासिक खपत (इकाइयों में) | उपभोक्ताओं की संख्या | संचयी बारंबारता |
|---|---|---|
| 65 – 85 | 4 | 4 |
| 85 – 105 | 5 | 4 + 5 = 9 |
| 105 – 125 | 13 | 9 + 13 = 22 |
| 125 – 145 | 20 | 22 + 20 = 42 |
| 145 – 165 | 14 | 42 + 14 = 56 |
| 165 – 185 | 8 | 56 + 8 = 64 |
| 185 – 205 | 4 | 64 + 4 = 68 |

बारंबारता सरणी से, n = 68

इसलिए, $\frac{n}{2} = \frac{68}{2} = 34$ है। यह प्रेक्षण अन्तराल 125 – 145 में आता है।
माध्यक वर्ग = 125 – 145
माध्यक वर्ग की निम्न सीमा $(l) = 125$ वर्ग माप $(h) = 20$
माध्यक वर्ग की बारंबारता $(f) = 20$
माध्यक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की संचयी बारंबारता $(cf) = 22$

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h = 125 + \left(\frac{34 - 22}{20}\right) \times 20 = 125 + 12 = 137$$

इसप्रकार, इस बंटन का माध्यक, बहुलक और माध्य क्रमशः 137, 135.76 और 137.05 हैं।
अतः, इस बंटन में माध्यक, बहुलक तथा माध्य लगभग बराबर हैं।

## प्रश्न 2:

यदि नीचे दिए हुए बंटन का माध्यक 28.5 हो तो $x$ और $y$ के मान ज्ञात कीजिए:

| वर्ग अन्तराल | बारंबारता |
|---|---|
| 0 – 10 | 5 |
| 10 – 20 | $x$ |
| 20 – 30 | 20 |
| 30 – 40 | 15 |
| 40 – 50 | $y$ |
| 50 – 60 | 5 |
| **योग** | 60 |

## उत्तर 2:

माध्यक ज्ञात करने के लिए, संचयी बारंबारताओं के साथ बारंबारता बंटन सरणी निम्नलिखित है:

| वर्ग अन्तराल | बारंबारता | संचयी बारंबारता |
|---|---|---|
| 0 – 10 | 5 | 5 |
| 10 – 20 | $x$ | $5 + x$ |
| 20 – 30 | 20 | $25 + x$ |
| 30 – 40 | 15 | $40 + x$ |
| 40 – 50 | $y$ | $40 + x + y$ |
| 50 – 60 | 5 | $45 + x + y$ |
| **योग** | **60** | |

ऊपर दी गई सरणी से, $n = 60$, इसलिए

$45 + x + y = 60$ या $x + y = 15$ ... (1)

बारंबारता बंटन का माध्यक 28.5 जो वर्ग अन्तराल 20 – 30 में आता है।
माध्यक वर्ग = 20 – 30
माध्यक वर्ग की निम्न सीमा $(l) = 20$ वर्ग माप $(h) = 10$
माध्यक वर्ग की बारंबारता $(f) = 20$
माध्यक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की संचयी बारंबारता $(cf) = 5 + x$

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h \Rightarrow 28.5 = 20 + \left\{\frac{\frac{60}{2} - (5 + x)}{20}\right\} \times 10$$

$$\Rightarrow 8.5 = \frac{25 - x}{2}$$

$\Rightarrow 17 = 25 - x \Rightarrow x = 8$
समीकरण (1) से, $8 + y = 15 \Rightarrow y = 7$
अतः, $x$ और $y$ के मान क्रमशः 8 और 7 है।

**प्रश्न 3:**

एक जीवन बीमा एजेंट 100 पॉलिसी धारकों की आयु के बंटन के निम्नलिखित आँकड़े ज्ञात करता है। माध्यक आयु परिकलित कीजिए, यदि पॉलिसी केवल उन्हीं व्यक्तियों को दी जाती है, जिनकी आयु 18 वर्ष या उससे अधिक हो, परन्तु 60 वर्ष से कम हो।

| आयु (वर्षों में) | पॉलिसी धारकों की संख्या |
|---|---|
| 20 से कम | 2 |
| 25 से कम | 6 |
| 30 से कम | 24 |
| 35 से कम | 45 |
| 40 से कम | 78 |
| 45 से कम | 89 |
| 50 से कम | 92 |
| 55 से कम | 98 |
| 60 से कम | 100 |

**उत्तर 3:**

यहाँ, दिया हुआ बंटन 'कम प्रकार का' है। इसलिए हमें वर्ग अंतरालों की उपरि सीमाएँ 20, 25, 30, ..., 60 प्राप्त होती। माध्यक ज्ञात करने के लिए इसके संगत वर्ग अन्तराल तथा संचयी बारंबारता बंटन सरणी निम्नलिखित है:

| आयु (वर्षों में) | पॉलिसी धारकों की संख्या ($f_i$) | संचयी बारंबारता ($cf$) |
|---|---|---|
| 20 से कम | 2 | 2 |
| 20 – 25 | 6 – 2 = 4 | 6 |
| 25 – 30 | 24 – 6 = 18 | 24 |
| 30 – 35 | 45 – 24 = 21 | 45 |
| 35 – 40 | 78 – 45 = 33 | 78 |
| 40 – 45 | 89 – 78 = 11 | 89 |
| 45 – 50 | 92 – 89 = 3 | 92 |
| 50 – 55 | 98 – 92 = 6 | 98 |
| 55 – 60 | 100 – 98 = 2 | 100 |
| **योग** | | |

बारंबारता सरणी से, n = 100 , इसलिए, $\frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$ है। यह प्रेक्षण अन्तराल 35 – 40 में आता है।

माध्यक वर्ग = 35 – 40, माध्यक वर्ग की निम्न सीमा ($l$) = 35 तथा वर्ग माप ($h$) = 5

माध्यक वर्ग की बारंबारता ($f$) = 33 तथा माध्यक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की संचयी बारंबारता ($cf$) = 45

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h = 35 + \left(\frac{50 - 45}{33}\right) \times 5 = 35 + \frac{25}{33} = 35 + 0.76 = 35.76$$

अतः, दिए गए बंटन की माध्यक आयु 35.76 वर्ष है।

**प्रश्न 4:**

एक पौधे की 40 पत्तियों की लंबाइयाँ निकटतम मिलीमीटरों में मापी जाती है तथा प्राप्त आँकड़ों को निम्नलिखित सरणी के रूप में निरुपित किया जाता है:

| लंबाई (mm में) | पत्तियों की संख्या |
|---|---|
| 118 – 126 | 3 |
| 127 – 135 | 5 |
| 136 – 144 | 9 |
| 145 – 153 | 12 |
| 154 – 162 | 5 |
| 163 – 171 | 4 |
| 172 – 180 | 2 |

पत्तियों की माध्यक लंबाई ज्ञात कीजिए।

(**संकेत:** मध्यक ज्ञात करने के लिए, आँकड़ों को सतत वर्ग अंतरालों में बदलना पड़ेगा, क्योंकि सूत्र में वर्ग अंतरालों को सतत माना गया है। तब ये वर्ग 117.5 – 126.5, 126.5 – 135.5... 171.5 – 180.5 में बदल जाते हैं।)

**उत्तर 4:**

यहाँ वर्ग सतत नहीं हैं। दो क्रमागत वर्गों उपरि और निम्न सीमाओं में 1 का अंतर है। अतः, वर्गों को संतत बनाने के लिए ½ (=0.5) उपरि सीमा में जोड़ देते हैं तथा निम्न सीमा से ½ (=0.5) घटा देते हैं। माध्यक ज्ञात करने के लिए, संचयी बारंबारताओं के साथ बारंबारता बंटन सरणी निम्नलिखित है:

| लंबाई (mm में) | पत्तियों की संख्या $f_i$ | संचयी बारंबारता |
|---|---|---|
| 117.5 – 126.5 | 3 | 3 |
| 126.5 – 135.5 | 5 | 3 + 5 = 8 |
| 135.5 – 144.5 | 9 | 8 + 9 = 17 |
| 144.5 – 153.5 | 12 | 17 + 12 = 29 |
| 153.5 – 162.5 | 5 | 29 + 5 = 34 |
| 162.5 – 171.5 | 4 | 34 + 4 = 38 |
| 171.5 – 180.5 | 2 | 38 + 2 = 40 |

बारंबारता सरणी से, n = 40

इसलिए, $\frac{n}{2} = \frac{40}{2} = 20$ है। यह प्रेक्षण अन्तराल 144.5 – 153.5 में आता है।

माध्यक वर्ग = 144.5 – 153.5

माध्यक वर्ग की निम्न सीमा ($l$) = 144.5 वर्ग माप ($h$) = 9

माध्यक वर्ग की बारंबारता ($f$) = 12

माध्यक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की संचयी बारंबारता ($cf$) = 17

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h = 144.5 + \left(\frac{20 - 17}{12}\right) \times 9 = 144.5 + \frac{9}{4} = 144.5 + 2.25 = 146.75$$

अतः, पत्तियों का माध्यक 146.75 mm है।

**प्रश्न 5:**

निम्नलिखित सरणी 400 नियान लैंपों के जीवन कालों को प्रदर्शित करती है:

| जीवन काल (घंटों में) | लैंपों की संख्या |
|---|---|
| 1500 – 2000 | 14 |
| 2000 – 2500 | 56 |
| 2500 – 3000 | 60 |
| 3000 – 3500 | 86 |
| 3500 – 4000 | 74 |
| 4000 – 4500 | 62 |
| 4500 – 5000 | 48 |

एक लैंप का माध्यक जीवन काल ज्ञात कीजिए।

**उत्तर 5:**

माध्यक ज्ञात करने के लिए, संचयी बारंबारताओं के साथ बारंबारता बंटन सरणी निम्नलिखित है:

| जीवन काल (घंटों में) | लैंपों की संख्या ($f_i$) | संचयी बारंबारता |
|---|---|---|
| 1500 – 2000 | 14 | 14 |
| 2000 – 2500 | 56 | 14 + 56 = 70 |
| 2500 – 3000 | 60 | 70 + 60 = 130 |
| 3000 – 3500 | 86 | 130 + 86 = 216 |
| 3500 – 4000 | 74 | 216 + 74 = 290 |
| 4000 – 4500 | 62 | 290 + 62 = 352 |
| 4500 – 5000 | 48 | 352 + 48 = 400 |
| **योग** | 400 | |

बारंबारता सरणी से, n = 400

इसलिए, $\frac{n}{2} = \frac{400}{2} = 20$ है। यह प्रेक्षण अन्तराल 3000 - 3500 में आता है। अतः, माध्यक वर्ग = 3000 - 3500

माध्यक वर्ग की निम्न सीमा $(l) = 3000$ वर्ग माप $(h) = 500$ और माध्यक वर्ग की बारंबारता $(f) = 86$

माध्यक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की संचयी बारंबारता $(cf) = 130$

$$\text{माध्यक } = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h = 3000 + \left(\frac{200 - 130}{86}\right) \times 500 = 3000 + \frac{35000}{86} = 3000 + 406.978 = 3406.978$$

अतः, एक लैंप का माध्यक जीवन काल 3406.98 घंटे है।

## प्रश्न 6:

एक स्थानीय टेलिफ़ोन निर्देशिका से 100 कुलनाम (surnames) लिए गए और उनमें प्रयुक्त अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों की संख्या का निम्नलिखित बारंबारता बंटन प्राप्त हुआ:

| **अक्षरों की संख्या** | 1 - 4 | 4 - 7 | 7 - 10 | 10 - 13 | 13 - 16 | 16 - 19 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **कुलनामों की संख्या** | 6 | 30 | 40 | 6 | 4 | 4 |

कुलनामों में मध्यक अक्षरों की संख्या ज्ञात कीजिए। कुलनामों में माध्य अक्षरों की संख्या ज्ञात कीजिए। साथ ही, कुलनामों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

## उत्तर 6:

माध्यक ज्ञात करने के लिए, संचयी बारंबारताओं के साथ बारंबारता बंटन सरणी निम्नलिखित है:

| **अक्षरों की संख्या** | **कुलनामों की संख्या $(f_i)$** | **संचयी बारंबारता** |
|---|---|---|
| 1 - 4 | 6 | 6 |
| 4 - 7 | 30 | 30 + 6 = 36 |
| 7 - 10 | 40 | 36 + 40 = 76 |
| 10 - 13 | 16 | 76 + 16 = 92 |
| 13 - 16 | 4 | 92 + 4 = 96 |
| 16 - 19 | 4 | 96 + 4 = 100 |
| **योग** | **100** | |

बारंबारता सरणी से, n = 100 , इसलिए, $\frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50$ है। यह प्रेक्षण अन्तराल 7 - 10 में आता है।

माध्यक वर्ग = 7 - 10

माध्यक वर्ग की निम्न सीमा $(l) = 7$ वर्ग माप $(h) = 3$ और माध्यक वर्ग की बारंबारता $(f) = 40$

माध्यक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की संचयी बारंबारता $(cf) = 36$

$$\text{माध्यक } = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h = 7 + \left(\frac{50 - 36}{40}\right) \times 3 = 7 + \frac{42}{40} = 7 + 1.05 = 8.05$$

प्रत्येक वर्ग-अन्तराल के लिए वर्ग चिन्ह $(x_i)$ ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करेंगे:

$$\text{वर्ग चिन्ह } x_i = \frac{\text{उपरि वर्ग सीमा } + \text{निचली वर्ग सीमा}}{2}$$

यहाँ, 11.5 को कल्पित माध्य $(a)$ लेकर, $d_i$, $u_i$, और $f_iu_i$ का मान निम्नलिखित से प्राप्त कर सकते हैं:

| **अक्षरों की संख्या** | **कुलनामों की संख्या $f_i$** | $x_i$ | $d_i = x_i - 11.5$ | $u_i = \frac{di}{3}$ | $f_iu_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 - 4 | 6 | 2.5 | - 9 | - 3 | - 18 |
| 4 - 7 | 30 | 5.5 | - 6 | - 2 | - 60 |
| 7 - 10 | 40 | 8.5 | - 3 | - 1 | - 40 |
| 10 - 13 | 16 | 11.5 | 0 | 0 | 0 |
| 13 - 16 | 4 | 14.5 | 3 | 1 | 4 |
| 16 - 19 | 4 | 17.5 | 6 | 2 | 8 |
| **योग** | 100 | | | | -106 |

यहाँ, सारणी से हमें निम्नलिखित मान प्राप्त होते हैं:

$\sum f_i = 100, \sum f_i u_i = -106, a = 11.5$ और $h = 3$

$$\text{माध्य } (\bar{x}) = a + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i}\right) h = 11.5 + \left(\frac{-106}{100}\right) \times 3 = 11.5 - \frac{318}{100} = 11.5 - 3.18 = 8.32$$

माध्यक ज्ञात करने के लिए, संचयी बारंबारताओं के साथ बारंबारता बंटन सरणी निम्नलिखित है:

| अक्षरों की संख्या | बारंबारता ($f_i$) |
|---|---|
| 1 – 4 | 6 |
| 4 – 7 | 30 |
| 7 – 10 | 40 |
| 10 – 13 | 16 |
| 13 – 16 | 4 |
| 16 – 19 | 4 |
| **योग** | 100 |

यहाँ, ये स्पष्ट है कि सबसे अधिक बारंबारता 40 है जो कि वर्ग 7 – 10 में है। इसलिए बहुलक वर्ग 7 – 10 है।
बहुलक वर्ग की निम्न सीमा ($l$) = 7, बहुलक वर्ग की बारंबारता ($f_1$) = 40 और वर्गमाप ($h$) = 3

बहुलक वर्ग से ठीक पहले आने वाले वर्ग की बारंबारता ($f_0$) = 30
बहुलक वर्ग से ठीक बाद में आने वाले वर्ग की बारंबारता ($f_2$) = 16

$$\text{बहुलक} = l + \left(\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right) \times h = 7 + \left(\frac{40 - 30}{2 \times 40 - 30 - 16}\right) \times 3 = 7 + \frac{10}{34} \times 3 = 7 + 0.88 = 7.88$$

अतः, कुलनामों में माध्यक तथा माध्य अक्षरों की संख्या क्रमशः 8.05 और 8.32 जबकि कुलनामों के अक्षरों का बहुलक 7.88 है।

## प्रश्न 7:

नीचे दिया हुआ बंटन एक कक्षा के 30 विद्यार्थियों के भार दर्शा रहा है। विद्यार्थियों का माध्यक भार ज्ञात कीजिए।

| भार (किलोग्राम में) | 40 – 45 | 45 – 50 | 50 - 55 | 55 – 60 | 60 – 65 | 65 – 70 | 70 – 75 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| विद्यार्थियों की संख्या | 2 | 3 | 8 | 6 | 6 | 3 | 2 |

## उत्तर 7:

माध्यक ज्ञात करने के लिए, संचयी बारंबारताओं के साथ बारंबारता बंटन सरणी निम्नलिखित है:

| भार (किलोग्राम में) | बारंबारता ($f_i$) | संचयी बारंबारता |
|---|---|---|
| 40 – 45 | 2 | 2 |
| 45 – 50 | 3 | 2 + 3 = 5 |
| 50 – 55 | 8 | 5 + 8 = 13 |
| 55 – 60 | 6 | 13 + 6 = 19 |
| 60 – 65 | 6 | 19 + 6 = 25 |
| 65 – 70 | 3 | 25 + 3 = 28 |
| 70 – 75 | 2 | 28 + 2 = 30 |
| **योग** | 30 | |

बारंबारता सरणी से, n = 30
इसलिए $\frac{n}{2} = \frac{30}{2} = 15$ है। यह प्रेक्षण अन्तराल 55 – 60 में आता है।
माध्यक वर्ग = 55 – 60 और माध्यक वर्ग की निम्न सीमा ($l$) = 55 वर्ग माप ($h$) = 5
माध्यक वर्ग की बारंबारता ($f$) = 6 तथा माध्यक वर्ग से ठीक पहले वर्ग की संचयी बारंबारता ($cf$) = 13

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times h = 55 + \left(\frac{15 - 13}{6}\right) \times 5 = 55 + \frac{10}{6} = 55 + 1.67 = 56.67$$

अतः, विद्यार्थियों का माध्यक भार 56.67 kg है।