गणित

(www.tiwariacademy.com)
(पाठ – 13) (पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन)
(कक्षा 10)

प्रश्नावली 13.4

प्रश्न 1:

पानी पीने वाला एक गिलास 14 cm ऊँचाई वाले एक शंकु के छिन्नक के आकार का है। दोनों वृत्ताकार सिरों के व्यास 4 cm और 2 cm हैं। इस गिलास की धारिता ज्ञात कीजिए।

उत्तर 1:

गिलास के ऊपरी भाग की त्रिज्या $(r_1) = 4/2 = 2$ cm
गिलास के निचले भाग की त्रिज्या $(r_2) = 2/2 = 1$ cm
ऊँचाई = 14 cm
गिलास की धारिता = छिन्नक का आयतन

$$= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) = \frac{1}{3}\pi h(2^2 + 1^2 + 2 \times 1) = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \times (7)$$

$$= \frac{1}{3} \times 22 \times 14 = \frac{308}{3} = 102\frac{2}{3}\ cm^3$$

अतः, गिलास की धारिता $102\frac{2}{3}\ cm^3$ है।

प्रश्न 2:

एक शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई 4 cm है तथा इसके वृत्तीय सिरों के परिमाप (परिधियाँ) 18 cm और 6 cm हैं। इस छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर 2:

छिन्नक के ऊपरी भाग का परिमाप = 18 cm

$$\Rightarrow 2\pi r_1 = 18 \qquad \Rightarrow r_1 = \frac{9}{\pi}$$

छिन्नक के निचले भाग का परिमाप = 6 cm

$$\Rightarrow 2\pi r_2 = 6 \qquad \Rightarrow r_2 = \frac{3}{\pi}$$

छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई = 4 cm
छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi\,(r_1 + r_2)\,l$

$$= \pi\left(\frac{9}{\pi} + \frac{3}{\pi}\right)4 = 12 \times 4 = 48\ cm^2$$

अतः, छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 48 cm^2 है।

प्रश्न 3:

एक तुर्की टोपी शंकु के एक छिन्नक के आकार की है (देखिए आकृति)। यदि इसके खुले सिरे की त्रिज्या 10 cm है, ऊपरी सिरे की त्रिज्या 4 cm है और टोपी की तिर्यक ऊँचाई 15 cm है, तो इसके बनाने में प्रयुक्त पदार्थ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर 3:

टोपी के निचले भाग की त्रिज्या $(r_1) = 10$ cm
टोपी के ऊपरी भाग की त्रिज्या $(r_2) = 4$ cm
टोपी की तिर्यक ऊँचाई = 15 cm
इसके बनाने में प्रयुक्त पदार्थ का क्षेत्रफल = छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + ऊपरी भाग का क्षेत्रफल

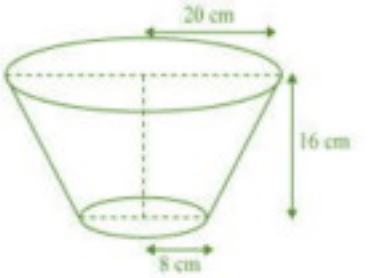
$$= \pi(r_1 + r_2)l + \pi r_2 = \pi(10 + 4) \times 15 + \pi \times 4^2 = 210\pi + 16\pi = 226\pi$$

$$= 226 \times \frac{22}{7} = 710\frac{2}{7}\ cm^2$$

अतः, टोपी के बनाने में प्रयुक्त पदार्थ का क्षेत्रफल $710\frac{2}{7}\ cm^2$ है।

प्रश्न 4:

धातु की चादर से बना और ऊपर से खुला एक बर्तन शंकु के एक छिन्नक के आकार का है, जिसके ऊँचाई 16 cm है तथा निचले और ऊपरी सिरों की त्रिज्याएँ क्रमशः 8 cm और 20 cm हैं। ₹ 20 प्रति लीटर की डर से, इस बर्तन को पूरा भर सकने वाले दूध का मूल्य ज्ञात कीजिए। साथ ही, इस बर्तन को बनाने के लिए प्रयुक्त धातु की चादर का मूल्य ₹ 8 प्रति 100 cm^2 की दर से ज्ञात कीजिए। [$\pi = 3.14$ लीजिए]



उत्तर 4:

बर्तन के ऊपरी भाग की त्रिज्या $(r_1) = 20$ cm
बर्तन के निचले भाग की त्रिज्या $(r_2) = 8$ cm
बर्तन की ऊँचाई $(h) = 16$ cm
बर्तन की तिर्यक ऊँचाई $= \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2}$

$= \sqrt{(20-8)^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20\ cm$

बर्तन की धारिता = छिन्नक का आयतन $= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 16 \times (20^2 + 8^2 + 20 \times 8) = \frac{1}{3} \times 3.14 \times 16 \times (400 + 64 + 160)$

$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 16 \times 624 = 104449.92\ cm^3 = 10.45\ litres.$

1 लीटर दूध का मूल्य = ₹ 20
10.45 लीटर दूध का मूल्य = 10.45 × ₹ 20 = ₹ 209
बर्तन को बनाने के लिए प्रयुक्त धातु की चादर का क्षेत्रफल
$= \pi (r_1 + r_2)\, l + \pi (r_2)^2$
$= \pi (20 + 8)\, 20 + \pi (8)^2$
$= 560\ \pi + 64\ \pi = 624\ \pi\ cm^2$
100 cm^2 चादर का मूल्य = ₹ 8
1 cm^2 चादर का मूल्य = ₹ $\frac{8}{100}$
624 π cm^2 चादर का मूल्य = ₹ $\frac{8}{100} \times 624\ \pi$ = ₹ $\frac{8}{100} \times 624 \times 3.14$ = ₹ 156.75
अतः, बर्तन को पूरा भर सकने वाले दूध का मूल्य ₹ 209 तथा इस बर्तन को बनाने के लिए प्रयुक्त धातु की चादर का मूल्य ₹ 156.75 है।

प्रश्न 5:

20 cm ऊँचाई और शीर्ष कोण (vertical angle) 60° वाले एक शंकु को उसकी ऊँचाई के बीचोबीच से होकर जाते हुए एक तल से दो भागों में काटा गया है, जबकि तल शंकु के आधार दे समांतर है। यदि इस प्राप्त शंकु के छिन्नक को व्यास $\frac{1}{16}$ cm वाले एक तार के रूप में बदल दिया जाता है तो तार की लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर 5:

ΔAEG में,

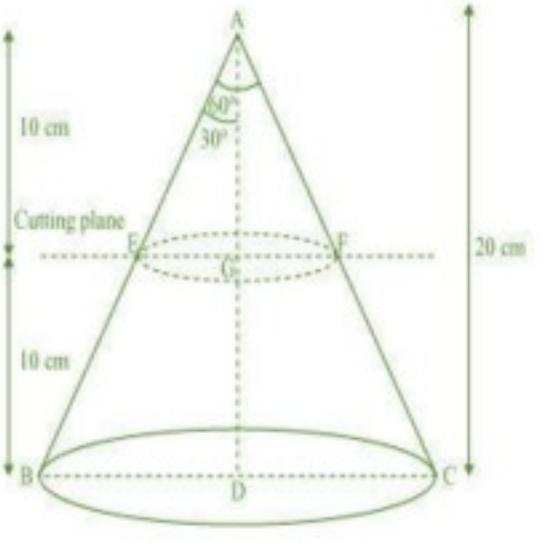
$\frac{EG}{AG} = \tan 30°$

$\Rightarrow \frac{EG}{10} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow EG = \frac{10}{\sqrt{3}}$

ΔABD में,

$\frac{BD}{AD} = \tan 30°$



$$\Rightarrow \frac{BD}{20} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow BD = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

छिन्नक के ऊपरी भाग की त्रिज्या $(r_1) = \frac{10}{\sqrt{3}}$

छिन्नक के निचले भाग की त्रिज्या $(r_2) = \frac{20}{\sqrt{3}}$

छिन्नक की ऊँचाई $(h) = 10$ cm

छिन्नक का आयतन $= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

$$= \frac{1}{3}\pi \times 10 \times \left[\left(\frac{10}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{10}{\sqrt{3}} \times \frac{20}{\sqrt{3}}\right]$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 10 \times \left(\frac{100}{3} + \frac{400}{3} + \frac{200}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 10 \times \left(\frac{700}{3}\right) = \frac{22000}{9}\ cm^3$$

तार की त्रिज्या $(r) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{32}\ cm$

माना तार की लंबाई $= l$

तार का आयतन = तार के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल × लंबाई

$$= (\pi r^2)(l)$$

$$= \pi\left(\frac{1}{32}\right)^2 \times l$$

छिन्नक का आयतन = तार का आयतन

$$\Rightarrow \frac{22000}{9} = \pi\left(\frac{1}{32}\right)^2 \times l$$

$$\Rightarrow \frac{22000}{9} = \frac{22}{7} \times \frac{1}{1024} \times l$$

$$\Rightarrow l = \frac{22000}{9} \times \frac{7}{22} \times 1024$$

$$= 796444.44\ cm$$

$$= 7964.44\ m$$

अतः, तार की लंबाई 7964.44 m है।