गणित

(www.tiwariacademy.com)

(अध्याय – 11) (रचनाएँ)

(Class – X)

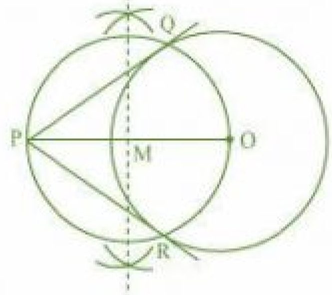
प्रश्नावली 11.2

प्रश्न 1:

6 cm त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। केंद्र से 10 cm दूर स्थित एक बिंदु से वृत्त पर स्पर्श रेखा युग्म की रचना कीजिए और उनकी लंबाइयाँ मापिए।

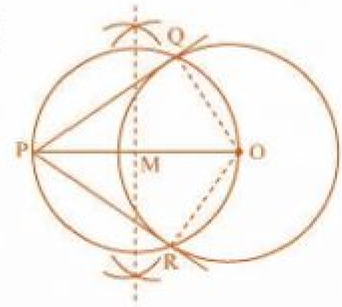
उत्तर 1:

रचना के चरण



- किसी बिंदु O को केंद्र मान कर एक 6 cm त्रिज्या का वृत्त बनाया। एक बिंदु P लिया जो केंद्र O से 10 cm दूर है। OP को मिलाया।
- OP का लंबसमद्विभाजक खींचा जो PO को बिंदु M पर मिलता है।
- M को केंद्र मानकर तथा MO त्रिज्या लेकर एक वृत्त बनाया।
- माना ये वृत्त, दिए गए वृत्त को बिन्दुओं Q और R पर कटता है।
- P और Q तथा P और R को मिलाया। PQ और PR अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।
- PQ तथा PR प्रत्येक की लम्बाई 8 cm है।

रचना की पुष्टि



रचना की पुष्टि करने के लिए हमें सिद्ध करना है कि PQ और PR उस वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं जिसका केंद्र O और त्रिज्या 6 cm है।

इसके लिए, OQ और OR को मिलाया। $\angle PQO$ अर्धवृत्त में बना कोण है।

हम जानते हैं कि अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होगा है। इसलिए

$\therefore \angle PQO = 90^\circ$

$\Rightarrow OQ \perp PQ$

क्योंकि OQ वृत्त की त्रिज्या है, अतः PQ वृत्त की स्पर्श रेखा होगी।

इसीप्रकार, PR भी वृत्त की स्पर्श रेखा है।

अतः, रचना की पुष्टि हो जाती है।

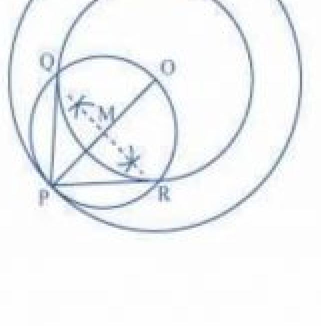
प्रश्न 2:

4 cm त्रिज्या के एक वृत्त पर 6 cm त्रिज्या के एक संकेन्द्रीय वृत्त के किसी बिंदु से एक स्पर्श रेखा की रचना कीजिए और उसकी लंबाई मापिए। परिकलन से इस माप की जाँच भी कीजिए। रचना का औचित्य भी दीजिए।

उत्तर 2:

रचना के चरण

- किसी बिंदु O को केंद्र मान कर एक 4 cm त्रिज्या का वृत्त बनाया।
- किसी बिंदु O को केंद्र मान कर एक 6 cm त्रिज्या का वृत्त बनाया। इस वृत्त पर एक बिंदु P लिया और OP को मिलाया।
- OP का लंबसमद्विभाजक खींचा जो PO को बिंदु M पर मिलता है।
- M को केंद्र मानकर तथा MO त्रिज्या लेकर एक वृत्त बनाया।
- माना ये वृत्त, दिए गए वृत्त को बिन्दुओं Q और R पर कटता है।
- P और Q तथा P और R को मिलाया। PQ और PR अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।
- PQ तथा PR प्रत्येक की लम्बाई 4.47 cm है।



ΔPQO में, PQ स्पर्श रेखा है, अतः $\angle PQO = 90^\circ$

$PO = 6$ cm तथा $QO = 4$ cm

ΔPQO में, पैथागोरस प्रमेय से: $PQ^2 + QO^2 = PQ^2$

$\Rightarrow PQ^2 + (4)^2 = (6)^2$

$\Rightarrow PQ^2 + 16 = 36$

$PQ^2 = 36 - 16 \quad \Rightarrow PQ^2 = 20$

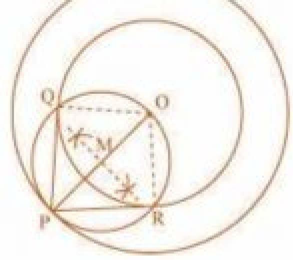
$\Rightarrow PQ = 2\sqrt{5}$

$PQ = 4.47$ cm

रचना की पुष्टि

रचना की पुष्टि करने के लिए हमें सिद्ध करना है कि PQ और PR उस वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं जिसका केंद्र O और त्रिज्या 4 cm है।

इसके लिए, OQ और OR को मिलाया। ∠PQO अर्धवृत्त में बना कोण है।
हम जानते हैं कि अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होगा है। इसलिए
$\therefore \angle PQO = 90^\circ \Rightarrow OQ \perp PQ$
क्योंकि OQ वृत्त की त्रिज्या है, अतः PQ वृत्त की स्पर्श रेखा होगी।
इसीप्रकार, PR भी वृत्त की स्पर्श रेखा है।
अतः, रचना की पुष्टि हो जाती है।



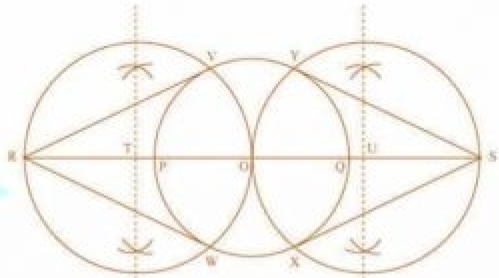
प्रश्न 3:

3 cm त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। इसके किसी बढ़ाए गए व्यास पर केंद्र से 7 cm की दूरी पर स्थित दो बिंदु P और Q लीजिए। इन दोनों बिन्दुओं से वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ खींचिए। रचना का औचित्य भी दीजिए।

उत्तर 3:

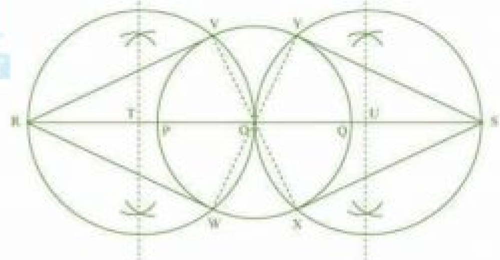
रचना के चरण

- किसी बिंदु O को केंद्र मान कर तथा 3 cm त्रिज्या लेकर एक वृत्त बनाया।
- वृत्त के व्यास PQ को दोनों ओर इसप्रकार बढाया ताकि OR = OS = 7 cm हो।
- OR तथा OS का लंबसमद्विभाजक बनाया जो क्रमशः OR और OS के मध्य बिन्दुओं T और U पर मिलता है।
- T और U को केंद्र मानकर तथा क्रमशः TO और UO त्रिज्या लेकर वृत्त बनाए। ये वृत्त दिए गए वृत्तों को क्रमशः बिन्दुओं V, W, X, Y पर मिलते हैं।
- RV, RW, SX और SY को मिलाया। ये चारों अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।



रचना की पुष्टि

रचना की पुष्टि करने के लिए हमें सिद्ध करना है कि OV, OW, OX और OY वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।
इसके लिए, OV, OW, OX और OY को मिलाया। ∠RVO अर्धवृत्त में बना कोण है।
हम जानते हैं कि अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होगा है। इसलिए
$\therefore \angle RVO = 90^\circ \Rightarrow OV \perp RV$
क्योंकि OV वृत्त की त्रिज्या है, अतः RV वृत्त की स्पर्श रेखा होगी।
इसीप्रकार, RW, SY, SX भी वृत्त की स्पर्श रेखाएँ है।
अतः, रचना की पुष्टि हो जाती है।



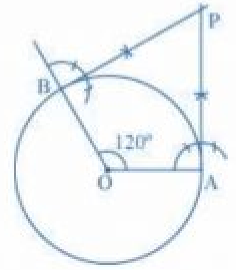
प्रश्न 4:

5 cm त्रिज्या के एक वृत्त पर ऐसी दो स्पर्श रेखाएँ खींचिए, जो परस्पर 60° के कोण पर झुकी हों। रचना का औचित्य भी दीजिए।

उत्तर 4:

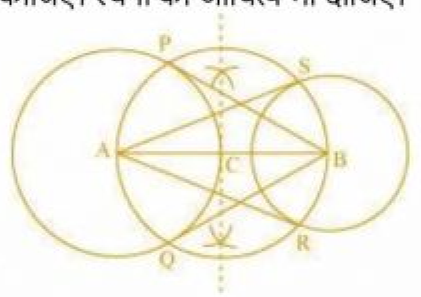
रचना के चरण

- किसी बिंदु O को केंद्र मान कर तथा 5 cm त्रिज्या लेकर एक वृत्त बनाया।
- वृत्त पर एक बिंदु A लिया और OA को मिलाया। बिंदु A से OA पर लंब एक रेखा खींची।
- रेखा OB खींची जो OA से 120° (180° – 60°) पर है।
- बिंदु B से OB पर लंब एक रेखा खींची। जो OA पर खींचे गए लंब को P पर मिलता है।
- PA और PB अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं जो 60° के कोण पर झुकी हैं।

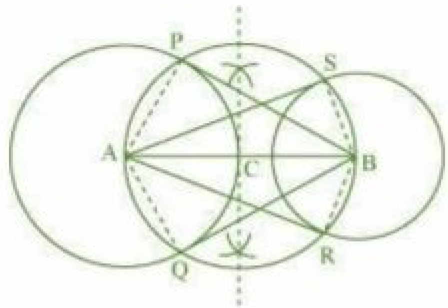


रचना की पुष्टि
रचना की पुष्टि करने के लिए हमें सिद्ध करना है कि $\angle APB = 60^\circ$
रचना से: $\angle OAP = 90^\circ$, $\angle OBP = 90^\circ$ और $\angle AOB = 120^\circ$
हम जानते हैं कि किसी चतुर्भुज के अंतः कोणों का योग 360° होता है।
इसलिए $\angle OAP + \angle AOB + \angle OBP + \angle APB = 360^\circ$
$\Rightarrow 90^\circ + 120^\circ + 90^\circ + \angle APB = 360^\circ$
$\angle APB = 60^\circ$
अतः, रचना की पुष्टि हो जाती है।

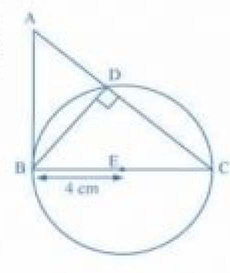
प्रश्न 5:
8 cm लंबा एक रेखाखंड AB खींचिए। A को केंद्र मान कर 4 cm त्रिज्या का एक वृत्त तथा B को केंद्र लेकर 3 cm त्रिज्या का एक अन्य वृत्त खींचिए । प्रत्येक वृत्त पर दूसरे वृत्त के केंद्र से स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए। रचना का औचित्य भी दीजिए।

उत्तर 5:
रचना के चरण


- रेखाखंड AB = 8 cm खींचा।
- बिन्दुओं A और B को केंद्र मानकर दो वृत्त क्रमशः 4 cm और 3 cm त्रिज्या के बनाए।
- रेखाखंड AB का लंबसमद्विभाजक खींचा जो AB को बिंदु C पर मिलता है।
- बिंदु C को केंद्र मान कर तथा AC त्रिज्या लेकर एक वृत्त बनाया जो अन्य दो वृत्तों को बिन्दुओं P, Q, R और S पर कटता है।
- BP, BQ, AS और AR को मिलाया।
- ये रेखाएँ ही अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।

रचना की पुष्टि


रचना की पुष्टि करने के लिए हमें सिद्ध करना है कि AS और AR उस वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं जिसका केंद्र B और त्रिज्या 3 cm है तथा BP और BQ उस वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं जिसका केंद्र A और त्रिज्या 4 cm है।
इसके लिए, AP, AQ, BS और BQ को मिलाया।
$\angle ASB$ अर्धवृत्त में बना कोण है।
हम जानते हैं कि अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होगा है। इसलिए
$\therefore \angle ASB = 90^\circ$
$\Rightarrow OQ \perp PQ$
क्योंकि BS वृत्त की त्रिज्या है, अतः AS वृत्त की स्पर्श रेखा होगी।
इसीप्रकार, AR, BP और BQ भी वृत्त की स्पर्श रेखाएँ है।
अतः, रचना की पुष्टि हो जाती है।

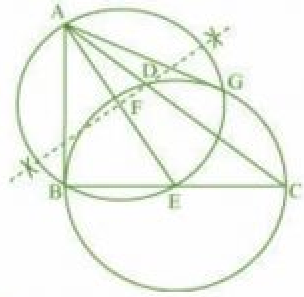
प्रश्न 6:


माना ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें AB = 6 cm, BC = 8 cm तथा $\angle B = 90^\circ$ है। B से AC पर BD लंब है। बिन्दुओं B, C, D से होकर जाने वाला एक वृत्त खींचा गया है। A से इस वृत्त पर स्पर्श रेखा की रचना कीजिए। रचना का औचित्य भी दीजिए।

उत्तर 6:
बिन्दुओं B, C, D से होकर जाने वाले वृत्त का BC व्यास होगा क्योंकि $\angle BDC = 90^\circ$ है।
वृत्त का केंद्र E BC का मध्य बिंदु होगा।

रचना के चरण

- AE को मिलाया और उसे समद्विभाजित किया। माना बिंदु F रेखा AE का मध्य बिंदु है।
- बिंदु F को केंद्र मान कर और FE त्रिज्या लेकर एक वृत्त बनाया जो दिए गए वृत्त को बिन्दुओं B और G पर कटता है। AG को मिलाया।
- AB और AG ही अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।



रचना की पुष्टि

रचना की पुष्टि करने के लिए हमें सिद्ध करना है कि AG और AB वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।

इसके लिए, E और G को मिलाया।

$\angle AGE$ अर्धवृत्त में बना कोण है।

हम जानते हैं कि अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होगा है। इसलिए

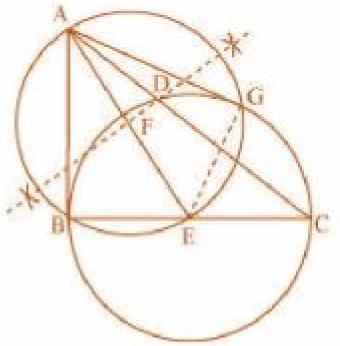
$\therefore \angle AGE = 90^\circ$

$\Rightarrow EG \perp AG$

क्योंकि EG वृत्त की त्रिज्या है, अतः AG वृत्त की स्पर्श रेखा होगी।

इसीप्रकार, BE भी वृत्त की स्पर्श रेखा है।

अतः, रचना की पुष्टि हो जाती है।



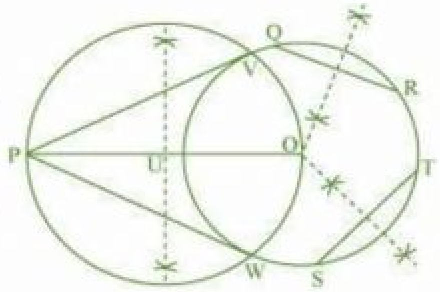
प्रश्न 7:

किसी चूड़ी की सहायता से एक वृत्त खींचिए। वृत्त के बाहर एक बिंदु लीजिए। इस बिंदु से वृत्त पर स्पर्श रेखाओं की रचना कीजिए। रचना का औचित्य भी दीजिए।

उत्तर 7:

रचना के चरण

- किसी चूड़ी की सहायता से एक वृत्त खींचिए।
- वृत्त के बाहर कोई बिंदु P लेकर दो जीवाएँ QR और ST बनाएँ।
- इन जीवाओं का लंबसमद्विभाजक बनाया जो परस्पर बिंदु O पर मिलती हैं।
- PO मिलाया तथा उसे समद्विभाजित किया। बिंदु U रेखाखंड PO का मध्य बिंदु है। U को केंद्र मानकर तथा OU को त्रिज्या लेकर एक वृत्त बनाया जो दिए गए वृत्त को बिन्दुओं V तथा W पर कटता है।
- PV तथा PW को मिलाया।
- PV और PW ही अभीष्ट स्पर्श रेखाएँ हैं।



रचना की पुष्टि

रचना की पुष्टि करने के लिए हमें सिद्ध करना है कि PV और PW वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं। यहाँ वृत्त का केंद्र नहीं दिया गया है। अतः, वृत्त का केंद्र प्राप्त करने के लिए वृत्त की दो जीवाएँ बनाकर उनका लंबसमद्विभाजक बनाया जो केंद्र बिंदु O पर मिलते हैं। OV और OW को मिलाया।

$\angle PVO$ अर्धवृत्त में बना कोण है।

हम जानते हैं कि अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होगा है। इसलिए

$\therefore \angle PVO = 90^\circ$

$\Rightarrow OV \perp PV$

क्योंकि OV वृत्त की त्रिज्या है, अतः PV वृत्त की स्पर्श रेखा होगी।

इसीप्रकार, PW भी वृत्त की स्पर्श रेखा है।

अतः, रचना की पुष्टि हो जाती है।