प्रश्न 1:

ΔABC में, जिसका कोण B समकोण है, AB = 24cm और BC = 7cm है। निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\sin A,\ \cos A$

(ii) $\sin C,\ \cos C$

उत्तर 1:

ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= (24\ cm)^2 + (7\ cm)^2$

$= (576 + 49)\ cm^2$

$= 625\ cm^2$

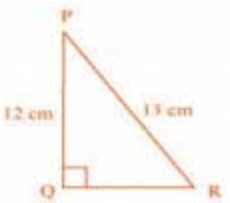
$\Rightarrow AC = \sqrt{625} = 25\ cm$

(i) $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$ और $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$

(ii) $\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$ और $\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$

प्रश्न 2:

आकृति में, $\tan P - \cot R$ का मान ज्ञात कीजिए।



उत्तर 2:

ΔPQR में, पाइथागोरस प्रमेय से

$QR^2 = PR^2 - PQ^2$

$= (13)^2 - (12)^2$

$= 169 - 144 = 25$

$\Rightarrow QR = \sqrt{25} = 5$

इसलिए, $\tan P - \cot R = \frac{QR}{PQ} - \frac{QR}{PQ} = \frac{5}{12} - \frac{5}{12} = 0$

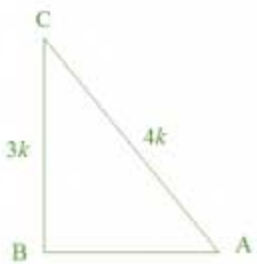
प्रश्न 3:

यदि $\sin A = \frac{3}{4}$ तो $\cos A$ और $\tan A$ का मान परिकलित कीजिए।

उत्तर 3:

दिया है $\sin A = \frac{3}{4}$

माना $\sin A = \frac{3k}{4k}$, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।



ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AB^2 = AC^2 - BC^2$

$= (4k)^2 - (3k)^2$

$= 16k^2 - 9k^2$

$= 7k^2$

$\Rightarrow AB = \sqrt{7k^2} = \sqrt{7}k$

इसलिए, $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{7}k}{4k} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ और $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{3k}{\sqrt{7}k} = \frac{3}{\sqrt{7}}$

प्रश्न 4:

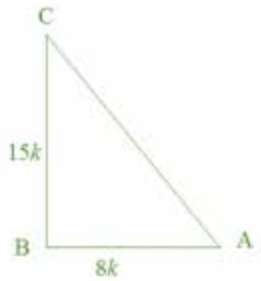
यदि $15 \cot A = 8$ हो तो $\sin A$ और $\sec A$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 4:

दिया है $15 \cot A = 8$

$\Rightarrow \cot A = \frac{8}{15}$

माना $\cot A = \frac{8k}{15k}$, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।



ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= (8k)^2 + (15k)^2$

$= 64k^2 + 225k^2$

$= 289k^2$

$\Rightarrow AC = \sqrt{289k^2} = 17k$

इसलिए, $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17}$ और $\sec A = \frac{AC}{AB} = \frac{17k}{8k} = \frac{17}{8}$

प्रश्न 5:

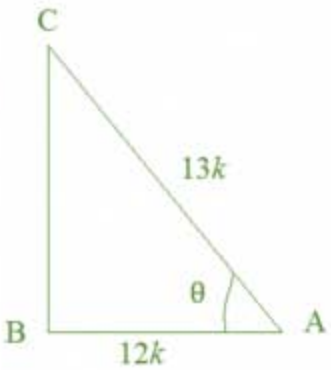
यदि $\sec \theta = \frac{13}{12}$, हो तो अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपात परिकलित कीजिए।

उत्तर 5:

दिया है $\sec \theta = \frac{13}{12}$

माना $\sec \theta = \frac{13k}{12k}$, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।

ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से



$BC^2 = AC^2 - AB^2$

$= (13k)^2 - (12k)^2$

$= 169k^2 - 144k^2$

$= 25k^2$

$\Rightarrow BC = \sqrt{25k^2} = 5k$

इसलिए, $\sin \theta = \frac{BC}{AC} = \frac{5k}{13k} = \frac{5}{13}$

$\cos \theta = \frac{AB}{AC} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}$

$\tan \theta = \frac{BC}{AB} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$

$\text{cosec}\, \theta = \frac{AC}{BC} = \frac{13k}{5k} = \frac{13}{5}$

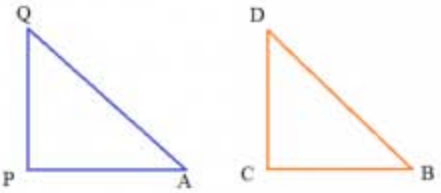
और $\cot \theta = \frac{AB}{BC} = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$

प्रश्न 6:

यदि $\angle A$ और $\angle B$ न्यून कोण हो, जहाँ $\cos A = \cos B$ तो दिखाइए कि $\angle A = \angle B$ ।

उत्तर 6:

दिया है $\cos A = \cos B$



$\cos A = \cos B$

$\Rightarrow \frac{AP}{AQ} = \frac{BC}{BD}$

$\Rightarrow \frac{AP}{BC} = \frac{AQ}{BD}$

माना $\frac{AP}{BC} = \frac{AQ}{BD} = k$ ... (i)

इसलिए, $AP = k(BC)$ तथा $AQ = k(BD)$

अब, ΔAPQ तथा ΔBCD में

$\frac{PQ}{CD} = \frac{\sqrt{AQ^2 - AP^2}}{\sqrt{BD^2 - BC^2}} = \frac{\sqrt{(k.BD)^2 - (k.BC)^2}}{\sqrt{BD^2 - BC^2}} = \frac{k\sqrt{BD^2 - BC^2}}{\sqrt{BD^2 - BC^2}} = k$ ... (ii)

समीकरण (i) और (ii) से,

$\frac{AP}{BC} = \frac{AQ}{BD} = \frac{PQ}{CD}$

अतः, $\Delta APQ \sim \Delta BCD$ [SSS प्रमेय से]

इसलिए, $\angle A = \angle B$

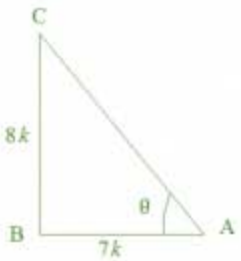
प्रश्न 7:

यदि $\cot\theta = \frac{7}{8}$, तो **(i)** $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ **(ii)** $\cot^2\theta$ का मान निकालिए?

उत्तर 7:

दिया है $\cot\theta = \frac{7}{8}$

माना $\cot\theta = \frac{7k}{8k}$, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।



ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AC^2 = BC^2 + AB^2$

$= (8k)^2 + (7k)^2$

$= 64k^2 + 49k^2$

$= 113k^2$

$\Rightarrow AC = \sqrt{113k^2} = \sqrt{113}k$

इसलिए,

(i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

$$= \frac{\left(1+\frac{8}{\sqrt{113}}\right)\left(1-\frac{8}{\sqrt{113}}\right)}{\left(1+\frac{7}{\sqrt{113}}\right)\left(1-\frac{7}{\sqrt{113}}\right)}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{8}{\sqrt{113}}\right)^2}{1-\left(\frac{7}{\sqrt{113}}\right)^2} = \frac{1-\frac{64}{113}}{1-\frac{49}{113}} = \frac{\frac{113-64}{113}}{\frac{113-49}{113}} = \frac{49}{64}$$

(ii) $\cot^2\theta$

$= (\cot\theta)^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}$

प्रश्न 8:

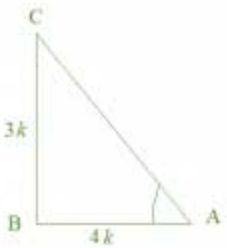
यदि $3\cot A = 4$, तो जाँच कीजिए कि $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ है या नहीं।

उत्तर 8:

दिया है $3\cot A = 4$

$\Rightarrow \cot A = \frac{4}{3}$

माना $\cot A = \frac{4k}{3k}$, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।



ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AC^2 = BC^2 + AB^2$

$= (3k)^2 + (4k)^2$

$= 9k^2 + 16k^2$

$= 25k^2$

$\Rightarrow AC = \sqrt{25k^2} = 5k$

इसलिए,

$$\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{\frac{16-9}{16}}{\frac{16+9}{16}} = \frac{7}{25}$$

और

$\cos^2 A - \sin^2 A$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16-9}{25} = \frac{7}{25}$$

अतः, $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$ है।

प्रश्न 9:

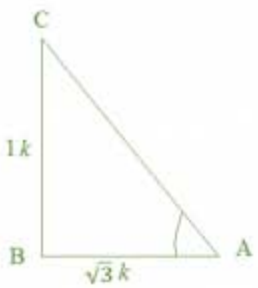
त्रिभुज ABC में, जिसका कोण B समकोण है, यदि $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$ (ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$

उत्तर 9:

दिया है $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

माना $\tan A = \frac{1k}{\sqrt{3}k}$, जहाँ k एक वास्तविक संख्या है।



ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AC^2 = BC^2 + AB^2$

$= (1k)^2 + (\sqrt{3}k)^2$

$= k^2 + 3k^2$

$= 4k^2$

$\Rightarrow AC = \sqrt{4k^2} = 2k$

इसलिए, (i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

$= \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$

(ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$

प्रश्न 10:

ΔPQR में, जिसका कोण Q समकोण है, PR + QR = 25 cm और PQ = 5 cm है। $\sin P, \cos P$ और $\tan P$ के मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर 10:

दिया है ΔPQR में, कोण Q समकोण है

माना QR = x

इसलिए, PR = $25 - x$

ΔPQR में, पाइथागोरस प्रमेय से

$PR^2 = PQ^2 + QQ^2$

$\Rightarrow (25 - x)^2 = (5)^2 + (x)^2$

$\Rightarrow 625 + x^2 - 50x = 25 + x^2$

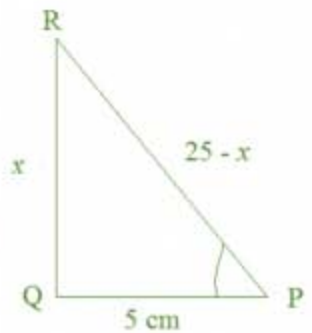
$\Rightarrow 625 - 50x = 25$

$\Rightarrow 50x = 600$

$\Rightarrow x = 12$

$\Rightarrow$ QR = 12

इसलिए, PR = 25 − 12 = 13



अब, $\sin P = \frac{QR}{PR} = \frac{12}{13}$, $\cos P = \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$ और $\tan P = \frac{QR}{PQ} = \frac{12}{5}$

प्रश्न 11:

बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(i) $\tan A$ का मान सदैव 1 से कम होता है।

(ii) कोण A के किसी मान के लिए $\sec A = \frac{12}{5}$

(iii) $\cos A$, कोण A के cosecant के लिए प्रयुक्त एक संक्षिप्त रूप है।

(iv) $\cot A$, cot और A का गुणनफल होता है।

(v) किसी भी कोण θ के लिए $\sin \theta = \frac{4}{3}$

उत्तर 11:

(i) असत्य,

क्योंकि $\tan A = \frac{\text{कोण } A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कोण } A \text{ की संलग्न भुजा}}$, यदि कोण की सम्मुख भुजा > संलग्न भुजा, तो $\tan A$ का मान 1 से अधिक होगा।

(ii) सत्य,

क्योंकि $\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{कोण } A \text{ की संलग्न भुजा}}$, हम जानते हैं कि कर्ण, संलग्न भुजा से सदैव बड़ी होती है।

(iii) असत्य,

क्योंकि $\cos A$, कोण A के cosine के लिए प्रयुक्त एक संक्षिप्त रूप है।

(iv) असत्य,

क्योंकि $\cot A$, कोण A का $cotangent$ होता है।

(v) असत्य,

क्योंकि $\sin\theta = \frac{\text{कोण } A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}$, हम जानते हैं कि कर्ण, सम्मुख भुजा से सदैव बड़ी होती है।