गणित

(www.tiwariacademy.com)
(पाठ – 7) (निर्देशांक ज्यामिति)
(कक्षा 10)

प्रश्नावली 7.1

प्रश्न 1:
बिंदुओं के निम्नलिखित युग्मों के बीच की दूरियाँ ज्ञात कीजिए :
(i) $(2,3),(4,1)$ **(ii)** $(-5,7),(-1,3)$ **(iii)** $(a,b),(-a,-b)$

उत्तर 1:
(i) $A(2,3),\ B(4,1)$
दूरी सूत्र $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ का प्रयोग करने पर,
बिंदुओं $A(2,3)$ और $B(4,1)$ के बीच की दूरी AB
$=\sqrt{(4-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
(ii) $P(-5,7),\ Q(-1,3)$
दूरी सूत्र $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ का प्रयोग करने पर,
बिंदुओं $P(-5,7)$ और $Q(-1,3)$ के बीच की दूरी PQ
$=\sqrt{[-1-(-5)]^2+(3-7)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$
(iii) $M(a,b),\ N(-a,-b)$
दूरी सूत्र $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ का प्रयोग करने पर,
बिंदुओं $M(a,b)$ और $N(-a,-b)$ के बीच की दूरी MN
$=\sqrt{[-a-(-a)]^2+[-b-(-b)]^2}=\sqrt{4a^2+4b^2}=2\sqrt{a^2+b^2}$

प्रश्न 2:
बिंदुओं $(0,0)$ और $(36,15)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। क्या अब आप अनुच्छेद 7.2 में दिए दोनों शहरों A और B के बीच की दूरी ज्ञात कर सकते हैं?

उत्तर 2:
यहाँ, $P(0,0)$ तथा $Q(36,15)$ है, दूरी सूत्र $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ का प्रयोग करने पर,
बिंदुओं $P(0,0)$ और $Q(36,15)$ के बीच की दूरी PQ
$=\sqrt{(36-0)^2+(15-0)^2}=\sqrt{1296+225}=\sqrt{1521}=39$
दूरी सूत्र $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ का प्रयोग करके हम अनुच्छेद 7.2 में दिए दोनों शहरों A और B के बीच की दूरी ज्ञात कर सकते हैं।

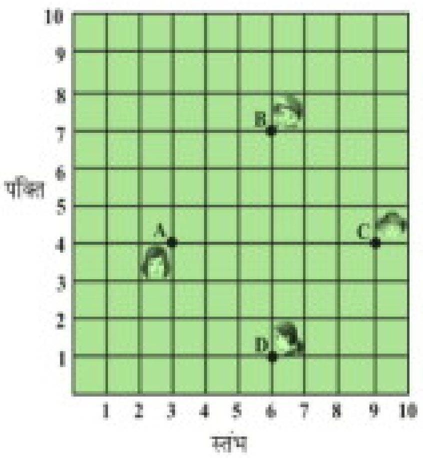
प्रश्न 3:
निर्धारित कीजिए कि क्या बिंदु $(1,5),(2,3)$ और $(-2,-11)$ संरेखी हैं।

उत्तर 3:
यहाँ, $A(1,5),\mathrm{B}(2,3)$ तथा $C(-2,-11)$ है।
दूरी सूत्र $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ का प्रयोग करने पर,
$AB=\sqrt{(2-1)^2+(3-5)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$
$BC=\sqrt{(-2-2)^2+(-11-3)^2}=\sqrt{16+196}=\sqrt{212}$
$CA=\sqrt{[1-(-2)]^2+[5-(-11)]^2}=\sqrt{9+256}=\sqrt{265}$
यहाँ, $AB+BC=\sqrt{5}+\sqrt{212}\neq\sqrt{265}=AC$
इसलिए, बिंदु $A(1,5),\mathrm{B}(2,3)$ तथा $C(-2,-11)$ संरेखी नहीं हैं।

प्रश्न 4:
जाँच कीजिए कि क्या बिंदु $(5,-2),(6,4)$ और $(7,-2)$ एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

उत्तर 4:
दिया है: बिंदु $A(5,-2)$, B(6, 4) और $C(7,-2)$ त्रिभुज के शीर्ष हैं।
दूरी सूत्र $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ का प्रयोग करने पर,
$AB=\sqrt{(6-5)^2+[4-(-2)]^2}=\sqrt{1+36}=\sqrt{37}$
$BC=\sqrt{(7-6)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{1+36}=\sqrt{37}$
$CA=\sqrt{(5-7)^2+[-2-(-2)]^2}=\sqrt{4+0}=2$
यहाँ, $AB=BC\neq AC$
इसलिए, बिंदु $A(5,-2)$, B(6, 4) और $C(7,-2)$ एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

प्रश्न 5:
किसी कक्षा में, चार मित्र बिंदुओं A, B, C और D पर बैठे हुए हैं, जैसाकि आकृति में दर्शाया गया है। चंपा और चमेली कक्षा के अंदर आती हैं और कुछ मिनट तक देखने के बाद, चंपा चमेली से पूछती है, 'क्या तुम नहीं सोचती हो कि ABCD एक वर्ग है?' चमेली इससे सहमत नहीं है। दूरी सूत्र का प्रयोग करके, बताइए कि इनमें कौन सही है।



उत्तर 5:
आकृति से, बिंदुओं A, B, C और D के निर्देशांक क्रमशः
$A(3,4)$, B(6, 7), C(9, 4) और D(6, 1) हैं।
$AB=\sqrt{(6-3)^2+(7-4)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$
$BC=\sqrt{(9-6)^2+(4-7)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$
$CD=\sqrt{(6-9)^2+(1-4)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$
$DA=\sqrt{(3-6)^2+(4-1)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$
चतुर्भुज की चारों भुजाएँ बराबर हैं। अतः, यह एक समचतुर्भुज अथवा एक वर्ग हो सकता है। इसलिए विकर्णों की लंबाई ज्ञात करके इस तथ्य को स्पष्ट किया जा सकता है।
$AC=\sqrt{(9-3)^2+(4-4)^2}=\sqrt{36+0}=6$
$BD=\sqrt{(6-6)^2+(1-7)^2}=\sqrt{0+36}=6$
यहाँ, $AB=BC=CD=DA$ तथा $AC=BD$ है।
अतः, ABCD एक वर्ग है। इसलिए, चंपा सही है।

प्रश्न 6:
निम्नलिखित बिंदुओं द्वारा बनने वाले चतुर्भुज का प्रकार (यदि कोई है तो) बताइए तथा अपने उत्तर के लिए कारण भी दीजिए:
(i) $(-1,-2)$, $(1,0)$, $(-1,2)$, $(-3,0)$
(ii) $(-3,5)$, $(3,1)$, $(0,3)$, $(-1,-4)$
(iii) $(4,5)$, $(7,6)$, $(4,3)$, $(1,2)$

उत्तर 6:
(i) दिया है: बिंदु $A(-1,-2)$, B(1, 0), C(−1, 2) और D(−3, 0) हैं।
$AB=\sqrt{[1-(-1)]^2+[0-(-2)]^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
$BC=\sqrt{(-1-1)^2+(2-0)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
$CD=\sqrt{[-3-(-1)]^2+(0-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$
$DA=\sqrt{[-1-(-3)]^2+(-2-0)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

चतुर्भुज की चारों भुजाएँ बराबर हैं। अतः, यह एक समचतुर्भुज अथवा एक वर्ग हो सकता है। इसलिए विकर्णों की लंबाई ज्ञात करके इस तथ्य को स्पष्ट किया जा सकता है।

$AC = \sqrt{[1-(-1)]^2 + [2-(-2)]^2} = \sqrt{0+16} = 4$

$BD = \sqrt{(-3-1)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{16+0} = 4$

यहाँ, $AB = BC = CD = DA$ तथा $AC = BD$ है।

अतः, ABCD एक वर्ग है।

(ii) दिया है: बिंदु $A(-3,5)$, B$(3,1)$, C$(0,3)$ और D$(-1,-4)$ हैं।

$AB = \sqrt{[3-(-3)]^2 + (1-5)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$BC = \sqrt{(0-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$CD = \sqrt{(1-0)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$DA = \sqrt{[-3-(-1)]^2 + [5-(-4)]^2} = \sqrt{4+81} = \sqrt{85}$

$AC = \sqrt{[0-(-3)]^2 + (3-5)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

$BD = \sqrt{(-1-3)^2 + (-4-1)^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$

यहाँ, $AC + BC = AB$ है। अर्थात बिंदु C भुजा पर AB स्थित है।

अतः, चतुर्भुज ABCD संभव नहीं है।

(iii) दिया है: बिंदु $A(4,5)$, B$(7,6)$, C$(4,3)$ और D$(1,2)$ हैं।

$AB = \sqrt{(7-4)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$BC = \sqrt{(4-7)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$CD = \sqrt{(1-4)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$DA = \sqrt{(4-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर हैं। अतः, यह एक आयत अथवा एक समांतर चतुर्भुज हो सकता है। इसलिए, विकर्णों की लंबाई ज्ञात करके इस तथ्य को स्पष्ट किया जा सकता है।

$AC = \sqrt{(4-4)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{0+4} = 2$

$BD = \sqrt{(1-7)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

यहाँ, $AB = CD,\ BC = AD$ तथा $AC \neq BD$ है।

अतः, ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

प्रश्न 7:

x –अक्ष पर वह बिंदु ज्ञात कीजिए जो $(2,-5)$ और $(-2,9)$ से समदूरस्थ हैं।

उत्तर 7:

माना, x –अक्ष पर कोई बिंदु $P(x,0)$ है, जो $A(2,-5)$ और $B(-2,9)$ से समदूरस्थ हैं।

इसलिए, $PA = PB$

$\Rightarrow \sqrt{(2-x)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{(-2-x)^2 + (9-0)^2}$

$\Rightarrow \sqrt{4+x^2-4x+25} = \sqrt{4+x^2+4x+81}$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$4+x^2-4x+25 = 4+x^2+4x+81$

$\Rightarrow -8x = 81-25 = 56$

$\Rightarrow x = -\frac{56}{8} = -7$

अतः, x –अक्ष पर वह बिंदु $P(-7,0)$ है, जो $(2,-5)$ और $(-2,9)$ से समदूरस्थ हैं।

प्रश्न 8:

y का वह मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए बिंदु $P(2,-3)$ और $Q(10,y)$ के बीच की दूरी 10 मात्रक है।

उत्तर 8:

बिंदु $P(2,-3)$ और $Q(10,y)$ के बीच की दूरी 10 मात्रक है।

$\Rightarrow \sqrt{(10-2)^2+[y-(-3)]^2}=10$

$\Rightarrow \sqrt{64+y^2+9+6y}=10$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$64+y^2+9+6y=100$

$\Rightarrow y^2+6y-27=0 \qquad \Rightarrow y^2+9y-3y-27=0$

$\Rightarrow y(y+9)-3(y+9)=0 \qquad \Rightarrow (y+9)(y-3)=0$

$\Rightarrow (y+9)=0$ या $(y-3)=0$

$\Rightarrow y=-9$ या $y=3$

प्रश्न 9:

यदि $Q(0,1)$ बिंदुओं $P(5,-3)$ और $R(x,6)$ से समदूरस्थ है, तो x के मान ज्ञात कीजिए। दूरियाँ QR और PR भी ज्ञात कीजिए।

उत्तर 9:

बिंदु $Q(0,1)$ बिंदुओं $P(5,-3)$ और $R(x,6)$ से समदूरस्थ है।

इसलिए, $QP=QR$

$\Rightarrow \sqrt{(5-0)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{(x-0)^2+(6-1)^2}$

$\Rightarrow \sqrt{25+16}=\sqrt{x^2+25}$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$25+16=x^2+25 \qquad \Rightarrow x^2=16 \qquad \Rightarrow x=\pm 4$

यदि $x=4$,

$QR=\sqrt{(4-0)^2+(6-1)^2}=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$

$PR=\sqrt{(4-5)^2+[6-(-3)]^2}=\sqrt{1+81}=\sqrt{82}$

यदि $x=-4$,

$QR=\sqrt{(-4-0)^2+(6-1)^2}=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$

$PR=\sqrt{(-4-5)^2+[6-(-3)]^2}=\sqrt{81+81}=\sqrt{162}=9\sqrt{2}$

प्रश्न 10:

x और y में एक ऐसा संबंध ज्ञात कीजिए कि बिंदु (x,y) बिंदुओं $(3,6)$ और $(-3,4)$ से समदूरस्थ हो।

उत्तर 10:

बिंदु $P(x,y)$ बिंदुओं $A(3,6)$ और $B(-3,4)$ से समदूरस्थ है।

इसलिए, $PA=PB$

$\Rightarrow \sqrt{(3-x)^2+(6-y)^2}=\sqrt{(-3-x)^2+(4-y)^2}$

$\Rightarrow \sqrt{9+x^2-6x+36+y^2-12y}=\sqrt{9+x^2+6x+16+y^2-8y}$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$9+x^2-6x+36+y^2-12y=9+x^2+6x+16+y^2-8y$

$\Rightarrow -12x-4y=-20 \qquad \Rightarrow 3x+y=5$