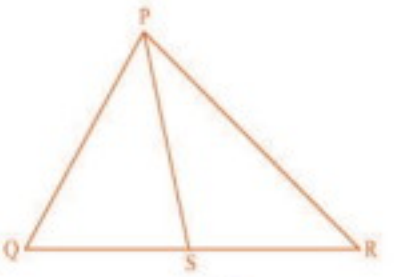
गणित

(www.tiwariacademy.com)
(पाठ – 6) (त्रिभुज)
(कक्षा 10)
प्रश्नावली 6.6 (ऐच्छिक)

प्रश्न 1:

आकृति में, PS कोण QPR का समद्विभाजक है। सिद्ध कीजिए कि $\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{QR}$ है।



उत्तर 1:

SP के समान्तर एक रेखाखंड RT खींचते हैं, जो बड़ाई हुई भुजा QP को बिंदु T पर मिलती है।
दिया है, SP कोण QPR का समद्विभाजक है। अतः

$\angle QPS = \angle SPR$ ... (1)

रचना से,

$\angle SPR = \angle PRT$ ($\because$ PS || TR) ... (2)

$\angle QPS = \angle QTR$ ($\because$ PS || TR) ... (3)

उपरोक्त समीकरणों से,

$\angle PRT = \angle QTR$

$\therefore PT = PR$

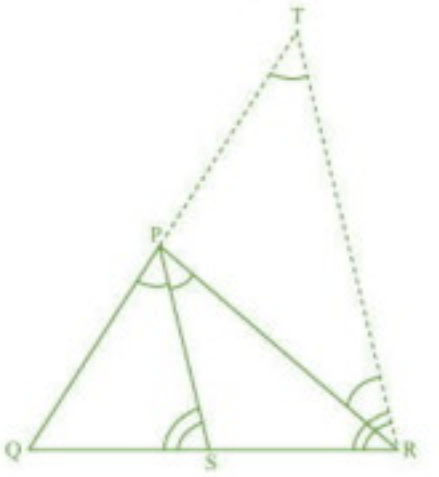
रचना से,

PS || TR

ΔQTR में, थेल्स प्रमेय से

$\frac{QS}{SR} = \frac{QP}{PT}$

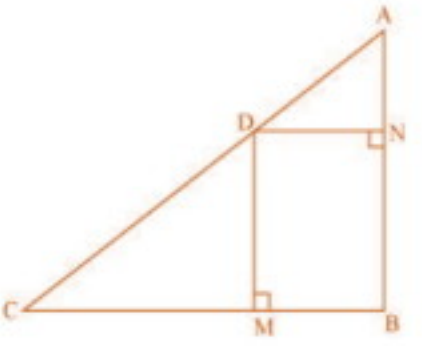
$\Rightarrow \frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{QR}$ [PT = TR]



प्रश्न 2:

आकृति में D त्रिभुज ABC के कर्ण AC पर स्थित एक बिंदु है जबकि BD ⊥ AC तथा DM ⊥ BC और DN ⊥ AB है। सिद्ध कीजिए

(i) $DM^2 = DN.MC$ **(ii)** $DN^2 = DM.AN$



उत्तर 2:

(i) B और D को मिलाया।

दिया है, DN || CB, DM || AB और $\angle B = 90°$,

$\therefore$ DMBN एक आयत है।

$\therefore$ DN = MB और DM = NB

दिया है, BD ⊥ AC, $\therefore \angle CDB = 90°$

$\Rightarrow \angle 2 + \angle 3 = 90°$ ... (1)

ΔCDM में, $\angle 1 + \angle 2 + \angle DMC = 180°$

$\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 = 90°$ ... (2)

ΔDMB में, $\angle 3 + \angle DMB + \angle 4 = 180°$

$\Rightarrow \angle 3 + \angle 4 = 90°$ ... (3)

समीकरण (1) और (2) से, $\angle 1 = \angle 3$

समीकरण (1) और (3) से, $\angle 2 = \angle 4$

ΔDCM और ΔBDM में,

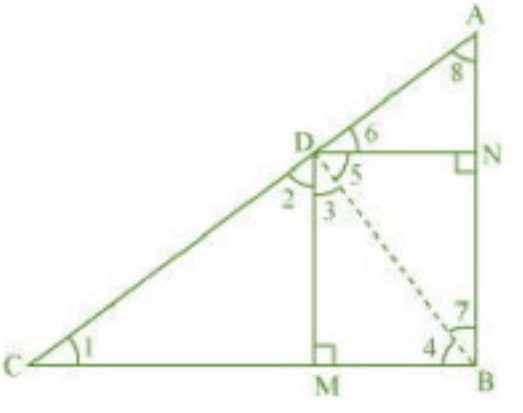
$\angle 1 = \angle 3$ [ऊपर सिद्ध किया गया है]

$\angle 2 = \angle 4$ [ऊपर सिद्ध किया गया है]

$\therefore$ ΔDCM ~ ΔBDM [AA समरूपता प्रमेय से]

$\Rightarrow \frac{BM}{DM} = \frac{DM}{MC} \Rightarrow \frac{DN}{DM} = \frac{DM}{MC}$ [$\because BM = DN$]

$\Rightarrow DM^2 = DN \times MC$



(ii) ΔDBN में, $\angle 5 + \angle 7 = 90°$ ... (4)

ΔDAN में, $\angle 6 + \angle 8 = 90°$ ... (5)

$BD \perp AC, \therefore \angle ADB = 90°$

$\Rightarrow \angle 5 + \angle 6 = 90°$ ... (6)

समीकरण (4) और (6) से, $\angle 6 = \angle 7$

समीकरण (5) और (6) से, $\angle 8 = \angle 5$

ΔDNA और ΔBND में,

$\angle 6 = \angle 7$ [ऊपर सिद्ध किया गया है]

$\angle 8 = \angle 5$ [ऊपर सिद्ध किया गया है]

$\therefore \Delta DNA \sim \Delta BND$ [AA समरूपता प्रमेय से]

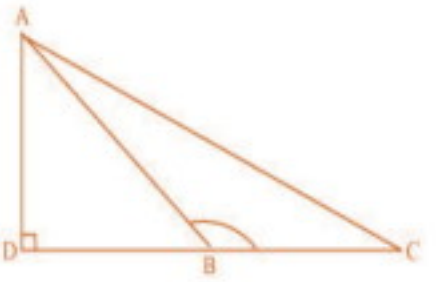
$$\Rightarrow \frac{AN}{DN} = \frac{DN}{NB}$$

$$\Rightarrow DN^2 = AN \times NB$$

$\Rightarrow DN^2 = AN \times DM$ $[\because NB = DM]$

प्रश्न 3:

आकृति में ABC एक त्रिभुज है जिसमें $\angle ABC > 90°$ है तथा $AD \perp CB$ है। सिद्ध कीजिए कि $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$ है।



उत्तर 3:

ΔADB में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AB^2 = AD^2 + DB^2$ ... (1)

ΔACD में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AC^2 = AD^2 + DC^2$

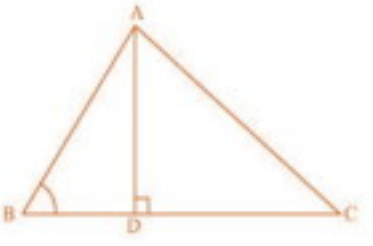
$AC^2 = AD^2 + (DB + BC)^2$

$AC^2 = AD^2 + DB^2 + BC^2 + 2DB \times BC$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2DB \times BC$ [समीकरण (1) से]

प्रश्न 4:

आकृति में ABC एक त्रिभुज है जिसमें $\angle ABC > 90°$ है तथा $AD \perp BC$ है। सिद्ध कीजिए कि $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$ है।



उत्तर 4:

ΔADB में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AD^2 + DB^2 = AB^2$

$\Rightarrow AD2 = AB2 - DB2$ ... (1)

ΔADC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AD^2 + DC^2 = AC^2$

$\Rightarrow AB^2 - BD^2 + DC^2 = AC^2$ [समीकरण (1) से]

$\Rightarrow AB^2 - BD^2 + (BC - BD)^2 = AC^2$

$\Rightarrow AC^2 = AB^2 - BD^2 + BC^2 + BD^2 - 2BC \times BD$

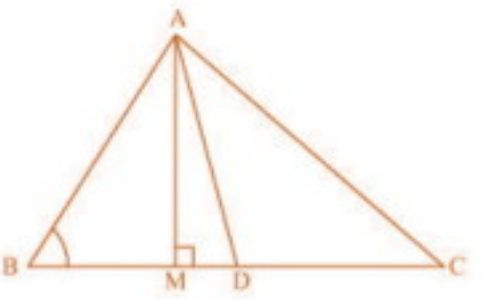
$= AB^2 + BC^2 - 2BC \times BD$

गणित

(www.tiwariacademy.com)
(पाठ – 6) (त्रिभुज)
(कक्षा 10)

प्रश्न 5:

आकृति में AD त्रिभुज ABC की एक मध्यिका है तथा AM ⊥ BC है। सिद्ध कीजिए कि



(i) $AC^2 = AD^2 + BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

(ii) $AB^2 = AD^2 - BC.DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

(ii) $AC^2 + AB^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$

उत्तर 5:

(i) ΔAMD में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AM^2 + MD^2 = AD^2$ ... (1)

ΔAMC में, पाइथागोरस प्रमेय से

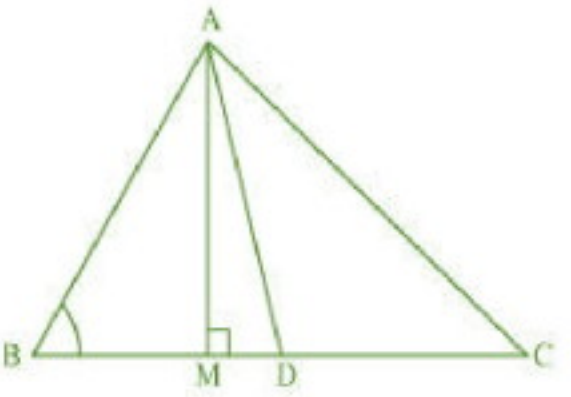
$AM^2 + MC^2 = AC^2$

$\Rightarrow AM^2 + (MD + DC)^2 = AC^2$

$\Rightarrow (AM^2 + MD^2) + DC^2 + 2MD.DC = AC^2$

$\Rightarrow AD^2 + DC^2 + 2MD.DC = AC^2$ [समीकरण (1) से]

दिया है DC = BC/2, इसलिए



$$\Rightarrow AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + 2MD.\left(\frac{BC}{2}\right) = AC^2 \quad \left[\because DC = \frac{BC}{2}\right]$$

$$\Rightarrow AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + MD.BC = AC^2$$

(ii) ΔABM में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AB^2 = AM^2 + MB^2$

$= (AD^2 - DM^2) + MB^2$

$= (AD^2 - DM^2) + (BD - MD)^2$

$= AD^2 - DM^2 + BD^2 + MD^2 - 2BD \times MD$

$= AD^2 + BD^2 - 2BD \times MD$

$$= AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{BC}{2}\right)MD = AC^2 \quad \left[\because BD = \frac{BC}{2}\right]$$

$$\Rightarrow AD^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 - BC.MD = AC^2$$

(iii) ΔABM में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AM^2 + MB^2 = AB^2$ ... (2)

ΔAMC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AM^2 + MC^2 = AC^2$ ... (3)

समीकरण (2) और (3) को जोड़ने पर

$2AM^2 + MB^2 + MC^2 = AB^2 + AC^2$

$\Rightarrow 2AM^2 + (BD - DM)^2 + (MD + DC)^2 = AB^2 + AC^2$

$\Rightarrow 2AM^2 + BD^2 + DM^2 - 2BD.DM + MD^2 + DC^2 + 2MD.DC = AB^2 + AC^2$

$\Rightarrow 2AM^2 + 2MD^2 + BD^2 + DC^2 + 2MD\,(-BD + DC) = AB^2 + AC^2$

$$\Rightarrow 2(AM^2 + MD^2) + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + 2MD\left(-\frac{BC}{2} + \frac{BC}{2}\right) = AB^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2 = AB^2 + AC^2$$

गणित

(www.tiwariacademy.com)
(पाठ – 6) (त्रिभुज)
(कक्षा 10)

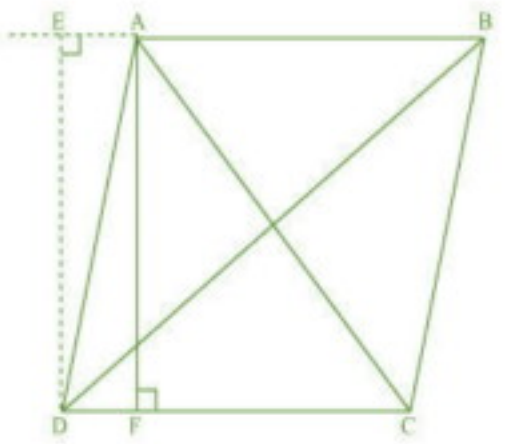
प्रश्न 6:

सिद्ध कीजिए कि एक समांतर चतुर्भुज के विकर्णों के वर्गों का योग उसकी भुजाओं में वर्गों के योग के बराबर होता है।

उत्तर 6:

ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

A से भुजा DC पर शीर्षलम्ब AF डाला तथा D से बड़ी हुई भुजा BA पर शीर्षलम्ब DE डाला।



ΔDEA में, पाइथागोरस प्रमेय से, $DE^2 + EA^2 = DA^2$ ... (i)

ΔDEB में, पाइथागोरस प्रमेय से, $DE^2 + EB^2 = DB^2$

$\Rightarrow DE^2 + (EA + AB)^2 = DB^2$

$\Rightarrow (DE^2 + EA^2) + AB^2 + 2EA \times AB = DB^2$

$\Rightarrow DA^2 + AB^2 + 2EA \times AB = DB^2$ ... (ii)

ΔADF में, पाइथागोरस प्रमेय से, $AD^2 = AF^2 + FD^2$

ΔAFC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$AC^2 = AF^2 + FC^2 = AF^2 + (DC - FD)^2 = AF^2 + DC^2 + FD^2 - 2DC \times FD$

$= (AF^2 + FD^2) + DC^2 - 2DC \times FD$

$\Rightarrow AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2DC \times FD$ ... (iii)

ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

$AB = CD$ ... (iv)

तथा, $BC = AD$ ... (v)

ΔDEA और ΔADF में,

$\angle DEA = \angle AFD$ [दोनों 90°]

$\angle EAD = \angle ADF$ [EA || DF]

$AD = AD$ [उभयनिष्ठ]

$\therefore \Delta EAD \cong \Delta FDA$ [AAS सर्वांगसम प्रमेय]

$\Rightarrow EA = DF$ ... (vi)

समीकरण (ii) और (iii) को जोड़ने पर

$DA^2 + AB^2 + 2EA \times AB + AD^2 + DC^2 - 2DC \times FD = DB^2 + AC^2$

$\Rightarrow DA^2 + AB^2 + AD^2 + DC^2 + 2EA \times AB - 2DC \times FD = DB^2 + AC^2$

$\Rightarrow BC^2 + AB^2 + AD^2 + DC^2 + 2EA \times AB - 2AB \times EA = DB^2 + AC^2$ [समीकरण (iv) और (vi) से]

$\Rightarrow AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$

प्रश्न 7:

आकृति में एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि

(i) $\Delta APC \sim \Delta DPB$ **(ii)** $AP.BP = CP.DP$

उत्तर 7:

CB को मिलाया।

(i) ΔAPC और ΔDPB में,

$\angle APC = \angle DPB$ [शीर्षाभिमुख कोण]

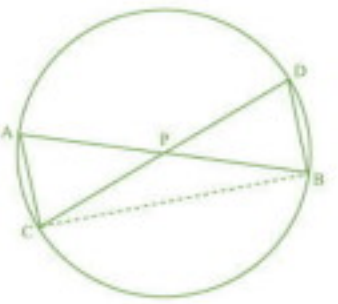
$\angle CAP = \angle BDP$ [एक ही वृत्तखंड में बने कोण]

$\Delta APC \sim \Delta DPB$ [AA समरूपता प्रमेय से]

(ii) हम पहले ही सिद्ध कर चुके हैं कि $\Delta APC \sim \Delta DPB$

हम जानते हैं कि समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ समानुपाती होती हैं। इसलिए

$$\frac{AP}{DP} = \frac{PC}{PB} = \frac{CA}{BD} \quad \Rightarrow \frac{AP}{DP} = \frac{PC}{PB} \quad \Rightarrow AP.PB = PC.DP$$



गणित

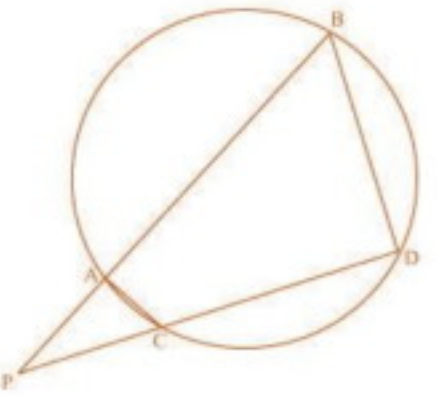
(www.tiwariacademy.com)
(पाठ – 6) (त्रिभुज)
(कक्षा 10)

प्रश्न 8:

आकृति में एक वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD बढाने पर परस्पर बिंदु P पर प्रतिच्छेद करती हैं। सिद्ध कीजिए कि

(i) $\Delta PAC \sim \Delta PDB$

(ii) $PA.PB = PC.PD$



उत्तर 8:

(i) ΔPAC और ΔPDB में,

$\angle P = \angle P$ [उभयनिष्ठ]

$\angle PAC = \angle PDB$

[चक्रिय चतुर्भुज का बाह्य कोण सम्मुख आंतरिक कोण के बराबर होता है।]

$\therefore \Delta PAC \sim \Delta PDB$ [AA समरूपता प्रमेय से]

(ii) हम जानते हैं कि समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ समानुपाती होती हैं। इसलिए

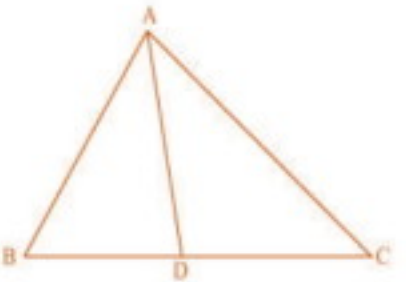
$$\frac{PA}{PD} = \frac{AC}{BD} = \frac{PC}{PB}$$

$$\Rightarrow \frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$$

$$\Rightarrow PA.PB = PC.DP$$

प्रश्न 9:

आकृति में त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिंदु D इस प्रकार स्थित है कि $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ है। सिद्ध कीजिए कि AD, कोण BAC का समद्विभाजक है।



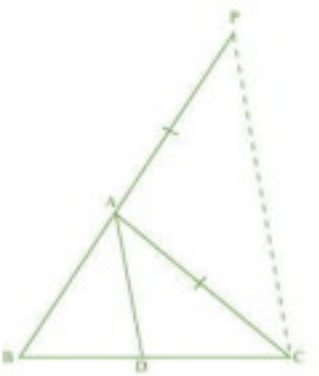
उत्तर 9:

BA को P तक बढ़ाया ताकि AP = AC हो और P को C से मिलाया।

दिया है कि

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AP}{AC}$$



थेल्स प्रमेय के विलोम से,

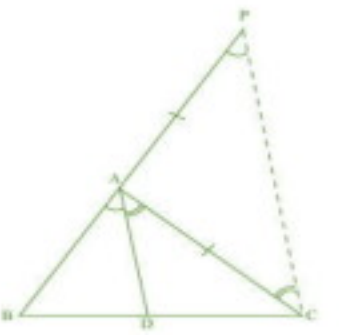
AD || PC

$\Rightarrow \angle BAD = \angle APC$ ... (1)

[संगत कोण]

और, $\angle DAC = \angle ACP$ ... (2)

[एकांतर कोण]



रचना से,

AP = AC

$\Rightarrow \angle APC = \angle ACP$ ... (3)

समीकरण (1), (2) और (3) की तुलना करने पर,

$\angle BAD = \angle APC$

$\Rightarrow$ AD, कोण BAC का समद्विभाजक है।

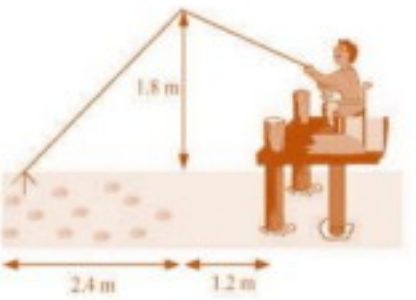
TIWARI ACADEMY

गणित

(www.tiwariacademy.com)
(पाठ – 6) (त्रिभुज)
(कक्षा 10)

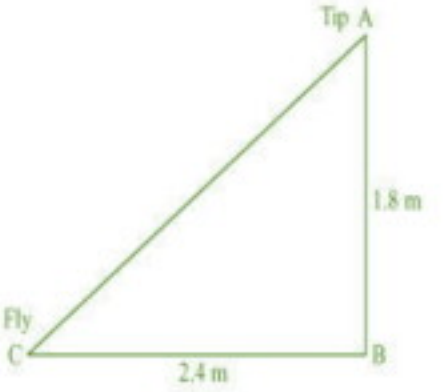
प्रश्न 10:

नाज़िमा एक नदी की धारा में मछलियाँ पकड़ रही है। उसकी मछली पकड़ने वाली छड़ का सिरा पानी की सतह से 1.8 m ऊपर है तथा डोरी के निचले सिरे से लगा काँटा पानी के सतह पर इस प्रकार स्थित है कि उसकी नाज़िमा से दूरी 3.6 m है और छड़ के सिरे के ठीक नीचे पानी के सतह पर स्थित बिंदु से उसकी दूरी 2.4 m है।
यह मानते हुए कि उसकी डोरी (उसकी छड़ के सिरे से काँटे तक) तनी हुई है, उसने कितनी डोरी बाहर निकाली हुई है (देखिए आकृति)? यदि वह डोरी को 5 cm/s की दर से अंदर खींचे, तो 12 सेकंड के बाद नाजिमा की काँटे से क्षैतिज दूरी कितनी होगी?



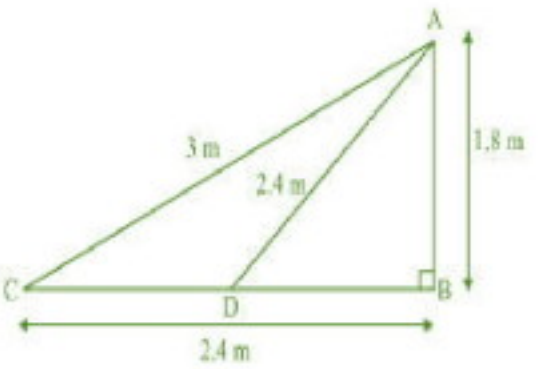
उत्तर 10:

माना AB पानी की सतह से मछली पकड़ने की छड़ की नोक (Tip) की ऊंचाई हो। तथा BC मछली पकड़ने वाली छड़ की नोक से उड़ान (Fly) की क्षैतिज दूरी हो।
फिर, AC डोरी की लंबाई है।
ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से



$AC^2 = AB^2 + BC^2$
$\Rightarrow AB^2 = (1.8\ m)^2 + (2.4\ m)^2$
$\Rightarrow AB^2 = (3.24 + 5.76)\ m^2$
$\Rightarrow AB^2 = 9.00\ m^2$
$\Rightarrow AB = \sqrt{9} = 3\ m$
अतः, बाहर निकाली हुई डोरी की लंबाई 3 m है।

वह डोरी को 5 cm/s की दर से अंदर खींचे, तो 12 सेकंड के बाद नाजिमा की काँटे से क्षैतिज दूरी
$= 12 \times 5 = 60\ cm = 0.6\ m$
माना उड़ान 12 सेकंड बाद बिंदु D पर होगा।
अतः, 12 सेकंड बाद, बाहर निकाली हुई डोरी की लंबाई AD है।



AD = AC – 12 सेकंड में नाज़िमा द्वारा खींचीं गई डोरी की लंबाई
$= (3.00 - 0.6)\ m$
$= 2.4\ m$
ΔADB में,
$AB^2 + BD^2 = AD^2$
$\Rightarrow (1.8\ m)^2 + BD^2 = (2.4\ m)^2$
$\Rightarrow BD^2 = (5.76 - 3.24)\ m^2 = 2.52\ m^2$
$\Rightarrow BD = 1.587\ m$

उड़ान (Fly) की क्षैतिज दूरी = BD + 1.2 m
$= (1.587 + 1.2)\ m$
$= 2.787\ m$
$= 2.79\ m$