

गणित

(www.tiwariacademy.com)

(पाठ - 6) (त्रिभुज)

(कक्षा 10)

प्रश्नावली 6.5

प्रश्न 1:

कुछ त्रिभुजों के भुजाएँ नीचे दी गई हैं। निर्धारित कीजिए कि इनमें से कौन - कौन से त्रिभुज समकोण त्रिभुज हैं। इस स्थिति में कर्ण की लंबाई भी लिखिए।

(i) 7 cm, 24 cm, 25 cm

(ii) 3 cm, 8 cm, 6 cm

(iii) 50 cm, 80 cm, 100 cm

(iv) 13 cm, 12 cm, 5 cm

उत्तर 1:

(i) दी गई त्रिभुज की भुजाएँ 7 cm, 24 cm और 25 cm हैं।

इनका वर्ग करने पर, हमें 49, 576 और 625 प्राप्त होता है।

$$49 + 576 = 625 \Rightarrow 7^2 + 24^2 = 25^2$$

ये भुजाएँ पाइथागोरस प्रमेय को संतुष्ट करती हैं, अतः यह एक समकोण त्रिभुज की भुजाएँ हैं।

हम जानते हैं कि समकोण त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा कर्ण होती है, इसलिए कर्ण की लंबाई 25 cm होगी।

(ii) दी गई त्रिभुज की भुजाएँ 3 cm, 6 cm और 8 cm हैं।

इनका वर्ग करने पर, हमें 9, 36 और 64 प्राप्त होता है।

$$9 + 36 \neq 64 \Rightarrow 3^2 + 6^2 \neq 8^2$$

ये भुजाएँ पाइथागोरस प्रमेय को संतुष्ट नहीं करती हैं, अतः यह एक समकोण त्रिभुज की भुजाएँ नहीं हैं।

(iii) दी गई त्रिभुज की भुजाएँ 50 cm, 80 cm और 100 cm हैं।

इनका वर्ग करने पर, हमें 2500, 6400 और 10000 प्राप्त होता है।

$$2500 + 6400 \neq 10000 \Rightarrow 50^2 + 80^2 \neq 100^2$$

ये भुजाएँ पाइथागोरस प्रमेय को संतुष्ट नहीं करती हैं, अतः यह एक समकोण त्रिभुज की भुजाएँ नहीं हैं।

(iv) दी गई त्रिभुज की भुजाएँ 5 cm, 12 cm और 13 cm हैं।

इनका वर्ग करने पर, हमें 25, 144 और 169 प्राप्त होता है।

$$25 + 144 = 169 \Rightarrow 5^2 + 12^2 = 13^2$$

ये भुजाएँ पाइथागोरस प्रमेय को संतुष्ट करती हैं, अतः यह एक समकोण त्रिभुज की भुजाएँ हैं।

हम जानते हैं कि समकोण त्रिभुज की सबसे बड़ी भुजा कर्ण होती है, इसलिए कर्ण की लंबाई 13 cm है।

प्रश्न 2:

PQR एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण P समकोण है तथा QR पर बिंदु M इस प्रकार स्थित है कि $PM \perp QR$ है। दर्शाइए कि $PM^2 = QM \times MR$ है।

उत्तर 2:

माना $\angle MPR = x$

ΔMPR में, $\angle MRP = 180^\circ - 90^\circ - x$

इसीप्रकार, ΔMPQ में,

$\angle MPQ = 90^\circ - \angle MPR = 90^\circ - x$

$\angle MQP = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - x) = x$

ΔQMP और ΔPMR में,

$\angle MPQ = \angle MRP$

$\angle PMQ = \angle RMP$

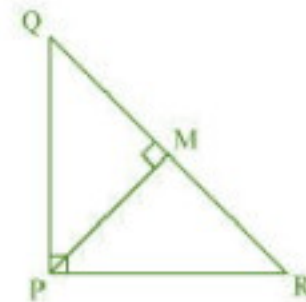
$\angle MQP = \angle MPR$

$\Rightarrow \Delta QMP \sim \Delta PMR$ [AAA समरूपता प्रमेय से]

हम जानते हैं कि समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ समानुपाती होती हैं। इसलिए

$$\frac{QM}{PM} = \frac{MP}{MR}$$

$$\Rightarrow PM^2 = MQ \times MR$$



गणित

(www.tiwariacademy.com)

(पाठ - 6) (त्रिभुज)

(कक्षा 10)

प्रश्न 3:

आकृति में ABD एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण A समकोण है तथा $AC \perp BD$ है। दर्शाइए कि

- (i) $AB^2 = BC \times BD$
- (ii) $AC^2 = BC \times DC$
- (iii) $AD^2 = BD \times CD$

उत्तर 3:

(i) $\triangle ADB$ और $\triangle CAB$ में,

$$\angle DAB = \angle ACB$$

$$\angle ABD = \angle CBA$$

$$\therefore \triangle DCM \sim \triangle BDM$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{BD}{AB}$$

$$\Rightarrow AB^2 = CB \times BD$$

(ii) माना $\angle CAB = x$

$\triangle CBA$ में,

$$\angle CBA = 180^\circ - 90^\circ - x$$

$$\Rightarrow \angle CBA = 90^\circ - x$$

इसीप्रकार, $\triangle CAD$ में,

$$\angle CAD = 90^\circ - \angle CAB$$

$$\Rightarrow \angle CAD = 90^\circ - x$$

$$\angle CDA = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - x)$$

$$\Rightarrow \angle CDA = x$$

$\triangle CBA$ और $\triangle CAD$ में,

$$\angle CBA = \angle CAD$$

$$\angle CAB = \angle CDA$$

$$\angle ACB = \angle DCA$$

$$\therefore \triangle CBA \sim \triangle CAD$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}$$

$$\Rightarrow AC^2 = BC \times DC$$

(iii) $\triangle DCA$ और $\triangle DAB$ में,

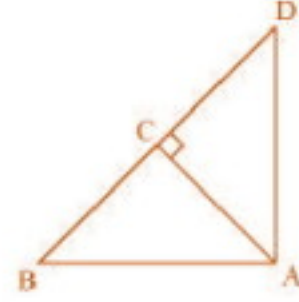
$$\angle DCA = \angle DAB$$

$$\angle CDA = \angle ADB$$

$$\therefore \triangle DCA \sim \triangle DAB$$

$$\Rightarrow \frac{DC}{DA} = \frac{DA}{DB}$$

$$\Rightarrow AD^2 = BD \times CD$$



[प्रत्येक 90°]

[उभयनिष्ट]

[AA समरूपता प्रमेय से]

[ऊपर सिद्ध किया गया है]

[ऊपर सिद्ध किया गया है]

[प्रत्येक 90°]

[AAA समरूपता प्रमेय से]

[प्रत्येक 90°]

[उभयनिष्ट]

[AA समरूपता प्रमेय से]

प्रश्न 4:

ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है। सिद्ध कीजिए कि $AB^2 = 2AC^2$ है।

उत्तर 4:

दिया है, ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AC = BC$ और $\angle C = 90^\circ$,

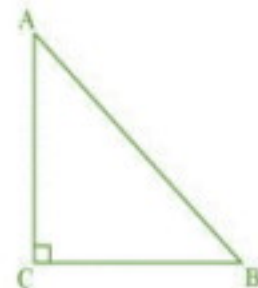
$\triangle ABC$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = 2AC^2$$

[क्योंकि $AC = BC$]



www.tiwariacademy.com

A Free web support in education

गणित

(www.tiwariacademy.com)

(पाठ - 6) (त्रिभुज)

(कक्षा 10)

प्रश्न 5:

ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AC = BC$ है। यदि $AB^2 = 2AC^2$ है, तो सिद्ध कीजिए कि ABC एक समकोण त्रिभुज है।

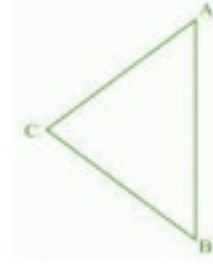
उत्तर 5:

दिया है, $AB^2 = 2AC^2$

$$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2 \quad [\text{क्योंकि } AC = BC]$$

ये भुजाएँ पाइथागोरस प्रमेय को संतुष्ट करती हैं, अतः ABC एक समकोण त्रिभुज है।



प्रश्न 6:

एक समबाहु त्रिभुज की भुजा $2a$ है। उसके प्रत्येक शीर्षलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर 6:

माना ABC एक समबाहु त्रिभुज है, जिसकी प्रत्येक भुजा $2a$ है। A से BC पर डाला गया शीर्षलंब AD है।

हम जानते हैं कि समबाहु त्रिभुज में शीर्षलंब सम्मुख भुजा को समद्विभाजित करता है।

इसलिए, $\therefore BD = DC = a$

$\triangle ADB$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

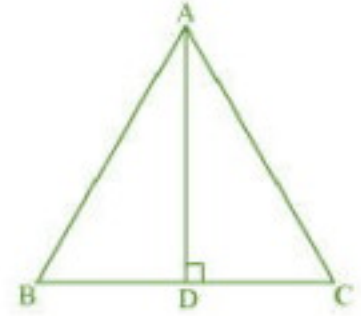
$$\Rightarrow (2a)^2 = AD^2 + a^2 \quad [\text{क्योंकि } AB = 2a]$$

$$\Rightarrow 4a^2 = AD^2 + a^2$$

$$\Rightarrow AD^2 = 3a^2$$

$$\Rightarrow AD = \sqrt{3}a$$

प्रत्येक शीर्षलंब की लंबाई $\sqrt{3}a$ है।



प्रश्न 7:

सिद्ध कीजिए कि एक समचतुर्भुज की भुजाओं के वर्गों का योग उसके विकर्णों के वर्गों के योग के बराबर होता है।

उत्तर 7:

$\triangle AOB$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 \quad \dots (i)$$

$\triangle BOC$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$BC^2 = BO^2 + OC^2 \quad \dots (ii)$$

$\triangle COD$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$CD^2 = CO^2 + OD^2 \quad \dots (iii)$$

$\triangle AOD$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$AD^2 = AO^2 + OD^2 \quad \dots (iv)$$

समीकरण (i), (ii), (iii) और (iv) को जोड़ने पर

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = OA^2 + OB^2 + OB^2 + OC^2 + OC^2 + OD^2 + OD^2 + OA^2$$

$$= 2[OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2]$$

$$= 2[2OA^2 + 2OB^2]$$

$$[\text{क्योंकि } OA = OC, OB = OD]$$

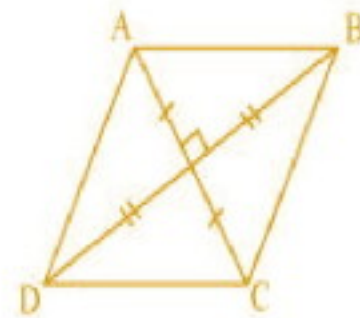
$$= 4[OA^2 + OB^2]$$

$$= 4 \left[\left(\frac{AC}{2} \right)^2 + \left(\frac{BD}{2} \right)^2 \right]$$

$$[\text{क्योंकि } OA = \frac{1}{2} AC, OB = \frac{1}{2} BD]$$

$$= 4 \left[\frac{AC^2}{4} + \frac{BD^2}{4} \right]$$

$$= AC^2 + BD^2$$



गणित

(www.tiwariacademy.com)

(पाठ - 6) (त्रिभुज)

(कक्षा 10)

प्रश्न 8:

आकृति में $\triangle ABC$ के अन्तर्गत में स्थित कोई बिंदु O है तथा $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ और $OF \perp AB$ है। दर्शाइए कि

(i) $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$

(ii) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$

उत्तर 8:

OA , OB और OC को मिलाया।

(i) $\triangle AOF$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$OA^2 = OF^2 + AF^2 \quad \dots (i)$$

$\triangle BOD$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$OB^2 = OD^2 + BD^2 \quad \dots (ii)$$

$\triangle COE$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

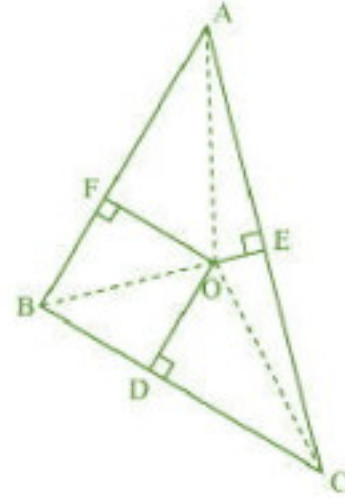
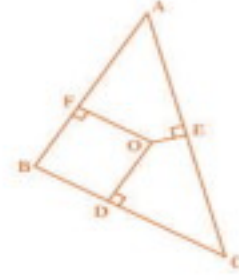
$$OC^2 = OE^2 + EC^2 \quad \dots (iii)$$

समीकरण (i), (ii) और (iii) को जोड़ने पर

$$\begin{aligned} OA^2 + OB^2 + OC^2 &= OF^2 + AF^2 + OD^2 + BD^2 + OE^2 + EC^2 \\ \Rightarrow OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 &= AF^2 + BD^2 + CE^2 \quad \dots (iv) \end{aligned}$$

(ii) समीकरण (iv) से,

$$\begin{aligned} AF^2 + BD^2 + CE^2 &= OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 \\ &= (OA^2 - OF^2) + (OC^2 - OD^2) + (OB^2 - OE^2) \\ &= AE^2 + CD^2 + BF^2 \end{aligned}$$



प्रश्न 9:

10 m लंबी एक सीढ़ी एक दीवार पर टिकाने पर भूमि से 8 m की ऊँचाई पर स्थित एक खिड़की तक पहुँचती है। दीवार के आधार से सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी ज्ञात कीजिए।

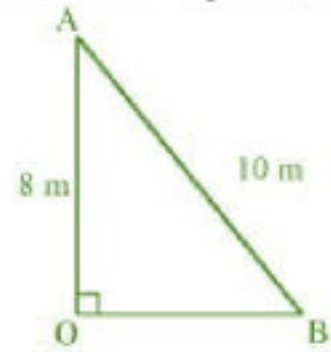
उत्तर 9:

माना OA दीवार है और AB सीढ़ी है।

$\triangle AOB$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$\begin{aligned} AB^2 &= OA^2 + OB^2 \\ \Rightarrow 10^2 &= 8^2 + BO^2 & \Rightarrow 100 &= 64 + BO^2 \\ \Rightarrow BO^2 &= 36 & \Rightarrow BO &= 6 \text{ m} \end{aligned}$$

अतः, दीवार के आधार से सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी 6 m है।



प्रश्न 10:

18 m ऊँचे एक ऊर्ध्वाधर खंभे के ऊपरी सिरे से एक तार का एक सिरा जुड़ा हुआ है तथा तार का दूसरा सिरा एक खूँटे से जुड़ा हुआ है। खंभे के आधार से खूँटे को कितनी दूरी पर गाड़ा जाए कि तार तना रहे जबकि तार की लंबाई 24 m है।

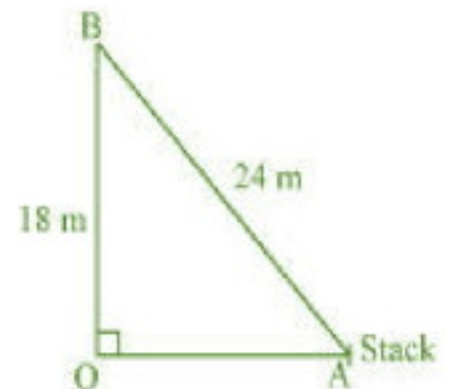
उत्तर 10:

माना OB खंभा है और A खूँटा (Stack) है।

$\triangle AOB$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$\begin{aligned} AB^2 &= OB^2 + OA^2 \\ \Rightarrow 24^2 &= 18^2 + OA^2 \\ \Rightarrow 576 &= 324 + OA^2 \\ \Rightarrow OA^2 &= 252 & \Rightarrow OA &= 6\sqrt{7} \text{ m} \end{aligned}$$

अतः, खंभे के आधार से खूँटे की दूरी $6\sqrt{7} \text{ m}$ है।



गणित

(www.tiwariacademy.com)

(पाठ - 6) (त्रिभुज)

(कक्षा 10)

प्रश्न 11:

एक हवाई जहाज एक हवाई अड्डे से उत्तर की ओर 1000 km/hr की चाल से उड़ता है। इसी समय एक अन्य हवाई जहाज उसी हवाई अड्डे से पश्चिम की ओर 1200 km/hr की चाल से उड़ता है। $1\frac{1}{2}$ घंटे के बाद दोनों हवाई जहाजों के बीच की दूरी कितनी होगी?

उत्तर 11:

$1\frac{1}{2}$ घंटे में पहले विमान (उत्तर की ओर) द्वारा तय दूरी = $1000 \times \frac{3}{2} = 1500 \text{ km}$

$1\frac{1}{2}$ घंटे में दूसरे विमान (पश्चिम की ओर) द्वारा तय दूरी = $1200 \times \frac{3}{2} = 1800 \text{ km}$

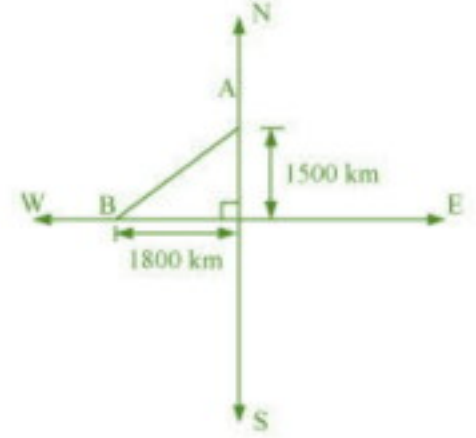
माना OA और OB तय दूरियां हैं। पाइथागोरस प्रमेय से जहाजों के बीच की दूरी

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2}$$

$$= \sqrt{(1500)^2 + (1800)^2} = \sqrt{2250000 + 3240000}$$

$$= \sqrt{5490000} = 300\sqrt{61} \text{ km}$$

अतः, $1\frac{1}{2}$ घंटे के बाद दोनों हवाई जहाजों के बीच की दूरी $300\sqrt{61} \text{ km}$ होगी।



प्रश्न 12:

दो खंभे जिनकी ऊँचाइयाँ 6 m और 11 m हैं तथा ये समतल भूमि पर खड़े हैं। यदि इनके ऊपरी सिरों के बीच की दूरी 12 m है तो इनके ऊपरी सिरों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर 12:

माना AB और CD दो खंभे हैं जिनकी ऊँचाइयाँ 6 m और 11 m हैं।

इसलिए, CP = 11 - 6 = 5 m तथा AP = 12 m

ΔAPC में, पाइथागोरस प्रमेय से

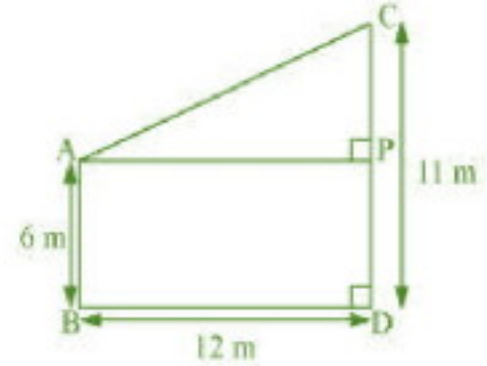
$$AP^2 + PC^2 = AC^2$$

$$\Rightarrow 12^2 + 5^2 = AC^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = 144 + 25 = 169$$

$$\Rightarrow AC = 13 \text{ m}$$

अतः, इनके ऊपरी सिरों के बीच की दूरी 13 m होगी।



प्रश्न 13:

एक त्रिभुज ABC जिसका कोण C समकोण है, की भुजाओं CA CB पर क्रमशः बिंदु D और E स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि $AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$ है।

उत्तर 13:

ΔACE में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$AC^2 + CE^2 = AE^2 \quad \dots (1)$$

ΔBCD में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$BC^2 + CD^2 = DB^2 \quad \dots (2)$$

समीकरण (1) और (2) से,

$$AC^2 + CE^2 + BC^2 + CD^2 = AE^2 + DB^2 \quad \dots (3)$$

ΔCDE में, पाइथागोरस प्रमेय से

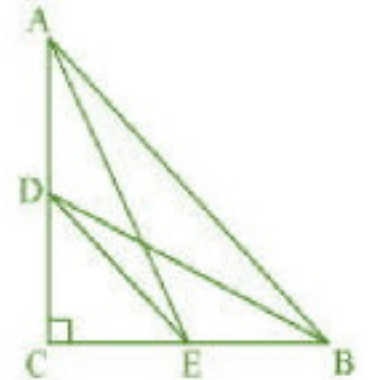
$$DE^2 = CD^2 + CE^2 \quad \dots (4)$$

ΔABC में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 \quad \dots (5)$$

समीकरण (3), (4) और (5) से,

$$DE^2 + AB^2 = AE^2 + DB^2$$



गणित

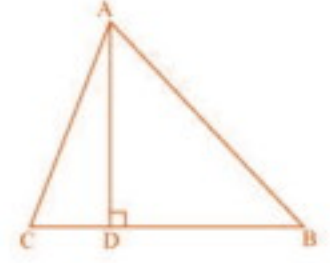
(www.tiwariacademy.com)

(पाठ - 6) (त्रिभुज)

(कक्षा 10)

प्रश्न 14:

किसी त्रिभुज ABC के शीर्ष A से BC पर डाला गया लम्ब BC को बिंदु D पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करता है कि $DB = 3CD$ है (देखिए आकृति)। सिद्ध कीजिए कि $2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$ है।



उत्तर 14:

ΔACD में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$AC^2 = AD^2 + DC^2$$

$$\Rightarrow AC^2 - DC^2 = AD^2 \quad \dots (1)$$

ΔABD में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$\Rightarrow AB^2 - BD^2 = AD^2 \quad \dots (2)$$

समीकरण (1) और (2) से,

$$AC^2 - DC^2 = AB^2 - BD^2 \quad \dots (3)$$

दिया है, $3DC = DB$, इसलिए

$$DC = \frac{BC}{4} \text{ और } BD = \frac{3BC}{4} \quad \dots (4)$$

समीकरण (3) और (4) से,

$$AC^2 - \left(\frac{BC}{4}\right)^2 = AB^2 - \left(\frac{3BC}{4}\right)^2$$

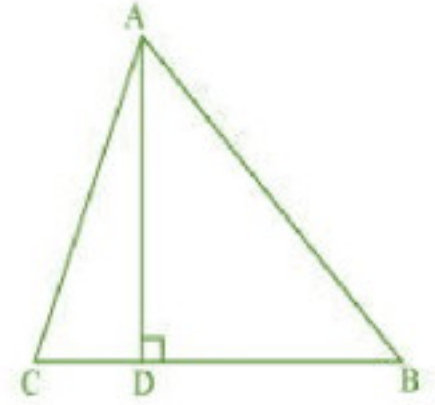
$$\Rightarrow AC^2 - \frac{BC^2}{16} = AB^2 - \frac{9BC^2}{16}$$

$$\Rightarrow 16AC^2 - BC^2 = 16AB^2 - 9BC^2$$

$$\Rightarrow 16AC^2 = 16AB^2 - 8BC^2$$

$$\Rightarrow 2AC^2 = 2AB^2 - BC^2$$

$$\Rightarrow 2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$$



प्रश्न 15:

किसी समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिंदु D इस प्रकार स्थित है कि $DB = \frac{1}{3} BC$ है। सिद्ध कीजिए कि $9AD^2 = 7AB^2$ है।

उत्तर 15:

ABC एक समबाहु त्रिभुज है, जिसकी प्रत्येक भुजा a है। A से BC पर डाला गया शीर्षलम्ब AE है।

हम जानते हैं कि समबाहु त्रिभुज में शीर्षलम्ब सम्मुख भुजा को समद्विभाजित करता है। इसलिए

$$\therefore BE = EC = \frac{a}{2}$$

ΔAEB में, पाइथागोरस प्रमेय से

$$AB^2 = AE^2 + BE^2 \Rightarrow (a)^2 = AD^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad [\text{क्योंकि } AB = a]$$

$$\Rightarrow a^2 = AD^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow AD^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

दिया है, $BD = \frac{1}{3} BC$

$$\therefore BD = \frac{a}{3}$$

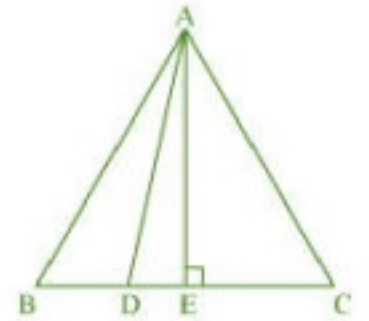
$$DE = BE - BD = \frac{a}{2} - \frac{a}{3} = \frac{a}{6}$$

ΔADE में, पाइथागोरस प्रमेय से, $AD^2 = AE^2 + DE^2$

$$AD^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{6}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{36} = \frac{28a^2}{36} = \frac{7}{9}a^2$$

$$\Rightarrow AD^2 = \frac{7}{9}AB^2$$

$$\Rightarrow 9AD^2 = 7AB^2$$



गणित

(www.tiwariacademy.com)

(पाठ - 6) (त्रिभुज)

(कक्षा 10)

प्रश्न 16:

किसी समबाहु त्रिभुज में, सिद्ध कीजिए कि उसकी एक भुजा के वर्ग का तिगुना उसके एक शीर्षलम्ब के वर्ग के चार गुने के बराबर होता है।

उत्तर 16:

माना ABC एक समबाहु त्रिभुज है, जिसकी प्रत्येक भुजा a है। A से BC पर डाला गया शीर्षलम्ब AE है। हम जानते हैं कि समबाहु त्रिभुज में शीर्षलम्ब सम्मुख भुजा को समद्विभाजित करता है। इसलिए

$$\therefore BE = EC = BC/2 = a/2$$

$\triangle ABE$ में, पाइथागोरस प्रमेय से

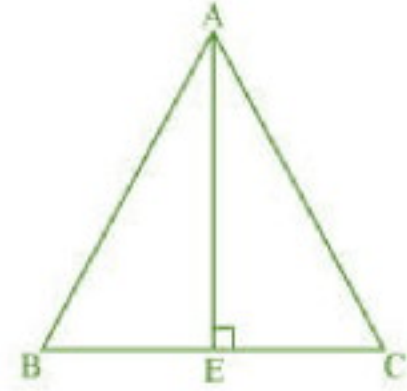
$$AB^2 = AE^2 + BE^2$$

$$\Rightarrow a^2 = AE^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = AE^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow AE^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$4AE^2 = 3a^2$$

$$\Rightarrow 4 \times (\text{शीर्षलम्ब का वर्ग}) = 3 \times (\text{एक भुजा का वर्ग})$$



प्रश्न 17:

सही उत्तर चुनकर उसका औचित्य दीजिए: $\triangle ABC$ में, $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $AC = 12$ cm और $BC = 6$ cm है। कोण B है:

(A) 120°

(B) 60°

(C) 90°

(D) 45°

उत्तर 17:

दिया है, $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $AC = 12$ cm और $BC = 6$ cm

इसलिए, $AB^2 = 108$, $AC^2 = 144$ और $BC^2 = 36$

$$AB^2 + BC^2$$

$$= 108 + 36$$

$$= 144$$

$$= AC^2$$

$\triangle ABC$ में, ये भुजाएँ पाइथागोरस प्रमेय को संतुष्ट करती हैं, अतः यह एक समकोण त्रिभुज की भुजाएँ हैं।

$$\therefore \angle B = 90^\circ$$

इसलिए, विकल्प (C) सही है।

