गणित

(www.tiwariacademy.com)

(पाठ – 6) (त्रिभुज)

(कक्षा 10)

प्रश्नावली 6.4

प्रश्न 1:

मान लीजिए $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ है और इनके क्षेत्रफल क्रमशः 64 cm^2 और 121 cm^2 हैं। यदि EF = 15.4 cm हो, तो BC ज्ञात कीजिए।

उत्तर 1:

दिया है, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, इसलिए

$$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DEF)} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2}$$

दिया है, EF = 15.4 cm, $ar(\Delta ABC) = 64\ cm^2$ और $ar(\Delta DEF) = 121\ cm^2$, इसलिए

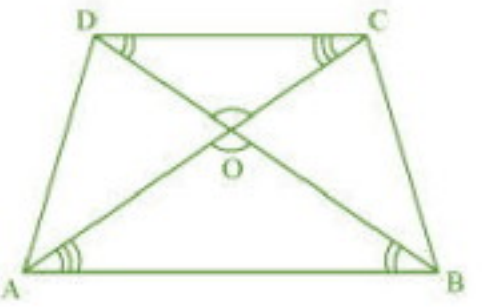
$$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DEF)} = \frac{BC^2}{EF^2}$$

$$\Rightarrow \frac{64}{121} = \frac{BC^2}{(15.4)^2} \Rightarrow \frac{8}{11} = \frac{BC}{15.4}$$

$$\Rightarrow BC = \frac{8 \times 15.4}{11} = 11.2\ cm$$

प्रश्न 2:

एक समलंब ABCD जिसमे AB || DC है, के विकर्ण परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि AB = 2CD हो तो त्रिभुजों AOB और COD के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।



उत्तर 2:

दिया है, AB || CD,

$\therefore \angle OAB = \angle OCD$ और $\angle OBA = \angle ODC$ [एकांतर कोण]

ΔAOB और ΔCOD में,

$\angle AOB = \angle COD$ [शीर्षाभिमुख कोण]

$\angle OAB = \angle OCD$ [एकांतर कोण]

$\angle OBA = \angle ODC$ [एकांतर कोण]

$\therefore \Delta AOB \sim \Delta COD$ [AAA समरूपता प्रमेय से]

इसलिए,

$$\frac{ar(\Delta AOB)}{ar(\Delta COD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$$

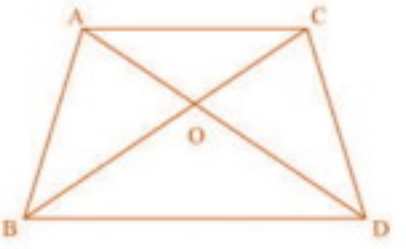
$$\Rightarrow \frac{ar(\Delta AOB)}{ar(\Delta COD)} = \frac{(2CD)^2}{CD^2}$$ [क्योंकि AB = 2CD]

$$\Rightarrow \frac{ar(\Delta AOB)}{ar(\Delta COD)} = \frac{4CD^2}{CD^2}$$

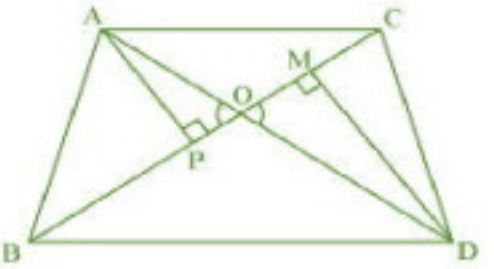
$$\Rightarrow \frac{ar(\Delta AOB)}{ar(\Delta COD)} = \frac{4}{1} = 4:1$$

प्रश्न 3:

आकृति में, एक ही आधार BC पर दो त्रिभुज ABC और DBC बने हैं। यदि AD, BC को O पर प्रतिच्छेद करे, तो दर्शाइए कि $\frac{ar(ABC)}{ar(DBC)} = \frac{AO}{DO}$ है।



उत्तर 3:



माना AP और DM रेखा BC पर शीर्षलंब हैं।

हम जानते हैं कि त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ शीर्षलंब

$$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DBC)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AP}{\frac{1}{2} \times BC \times DM} \quad \ldots (1)$$

ΔAPO और ΔDMO में,

∠APO = ∠DMO [प्रत्येक 90°]

∠AOP = ∠DOM [शीर्षाभिमुख कोण]

∴ ΔAPO ~ ΔDMO [AA समरूपता प्रमेय से]

$$\frac{AP}{DM} = \frac{AO}{DO}$$

$$\Rightarrow \frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DBC)} = \frac{AO}{DO}$$ [समीकरण (1) से]

प्रश्न 4:

यदि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हों तो सिद्ध कीजिए कि वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

उत्तर 4:

माना, ΔABC ~ ΔDEF, इसलिए

$$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DEF)} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2} \quad \ldots (1)$$

दिया है, $ar(\Delta ABC) = ar(\Delta DEF)$

इसलिए, $\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DEF)} = 1$

समीकरण (1) से, $\frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = 1$

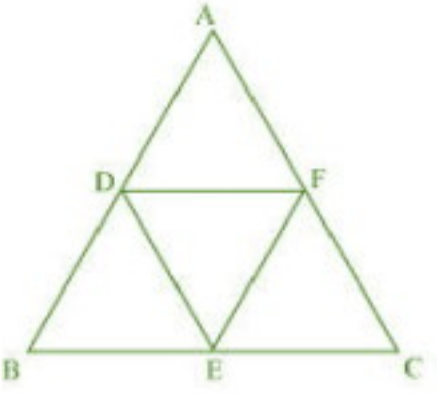
⇒ AB = DE, BC = EF और AC = DF

∴ ΔABC ≅ ΔDEF [SSS सर्वांगसम प्रमेय से]

प्रश्न 5:

एक त्रिभुज ABC की भुजाओं AB, BC और CA के मध्य-बिंदु क्रमशः D, E और F हैं। ΔDEF और ΔABC के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

उत्तर 5:



D और E भुजाओं AB और AC के मध्य-बिंदु हैं।

इसलिए, DE || AC और DE = ½ AC

ΔBED और ΔBCA में,

∠BED = ∠BCA [संगत कोण]

∠BDE = ∠BAC [संगत कोण]

∴ ΔBED ~ ΔBCA [AA समरूपता प्रमेय से]

$$\frac{ar(\Delta BED)}{ar(\Delta BCA)} = \frac{DE^2}{AC^2} \Rightarrow \frac{ar(\Delta BED)}{ar(\Delta BCA)} = \frac{\left(\frac{1}{2}AC\right)^2}{AC^2} \Rightarrow \frac{ar(\Delta BED)}{ar(\Delta BCA)} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow ar(\Delta BED) = \frac{1}{4} \times ar(\Delta BCA)$$

माना $ar(\Delta ABC) = x$

इसलिए, $ar(\Delta BED) = \frac{1}{4}x$

इसीप्रकार,

$ar(\Delta CEF) = \frac{1}{4}x$ और $ar(\Delta ADF) = \frac{1}{4}x$

तथा $ar(\Delta DEF) = ar(\Delta ABC) - ar(\Delta BED) - ar(\Delta CEF) - ar(\Delta ADF)$

$\Rightarrow ar(\Delta DEF) = x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x = x - \frac{3}{4}x = \frac{1}{4}x$

$\Rightarrow ar(\Delta DEF) = \frac{1}{4} \times (\Delta ABC)$ [क्योंकि $ar(\Delta ABC) = x$]

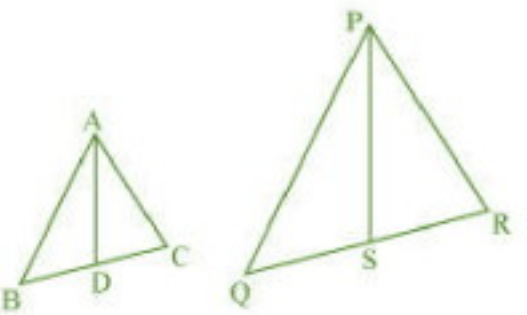
$\Rightarrow \frac{ar(\Delta DEF)}{ar(\Delta ABC)} = \frac{1}{4}$

प्रश्न 6:

सिद्ध कीजिए कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात इनकी संगत मध्यिकाओं के अनुपात का वर्ग होता है।

उत्तर 6:

माना ΔABC ~ ΔPQR हैं। AD और PS त्रिभुज की माध्यिकाएँ हैं।



दिया है, ΔABC ~ ΔPQR

इसलिए, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ ... (1)

तथा

∠A = ∠P, ∠B = ∠Q, ∠C = ∠R ... (2)

क्योंकि AD और PS त्रिभुज की माध्यिकाएँ हैं, इसलिए

∴ BD = DC = ½ BC

और, QS = SR = ½ QR

समीकरण (1) से

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QS} = \frac{AC}{PR}$ ... (3)

ΔABD और ΔPQS में,

∠B = ∠Q [समीकरण (2) से]

और, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QS}$ [समीकरण (3) से]

∴ ΔABD ~ ΔPQS [SAS समरूपता प्रमेय से]

इसलिए

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BD}{QS} = \frac{AD}{PS}$ ... (4)

तथा

$$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AC^2}{PR^2}$$

परन्तु समीकरण (1) और (4) से

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{AD}{PS}$$

अतः,

$$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta PQR)} = \frac{AD^2}{PS^2}$$

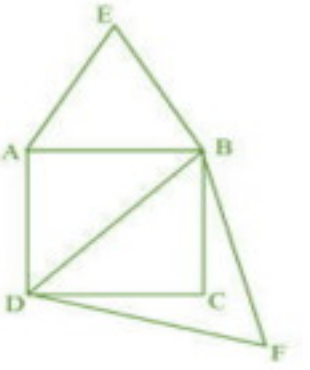
गणित

(www.tiwariacademy.com)
(पाठ – 6) (त्रिभुज)
(कक्षा 10)

प्रश्न 7:

सिद्ध कीजिए कि एक वर्ग की किसी भुजा पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल उसी वर्ग के एक विकर्ण पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

उत्तर 7:



माना ABCD एक वर्ग है जिसकी प्रत्येक a भुजा है। इसलिए
विकर्ण = $\sqrt{2}a$
वर्ग की भुजा और विकर्ण पर बनाए गए समबाहु त्रिभुज क्रमशः ΔABE और ΔDBF हैं।
त्रिभुज ABE की प्रत्येक भुजा की लंबाई = a
तथा त्रिभुज DBF की प्रत्येक भुजा की लंबाई = $\sqrt{2}a$
दोनों त्रिभुज समबाहु त्रिभुज हैं। अतः दोनों त्रिभुजों के प्रत्येक कोण 60° के हैं। इस प्रकार AAA समरूप प्रमेय से ΔABE ~ ΔDBF
इसलिए,

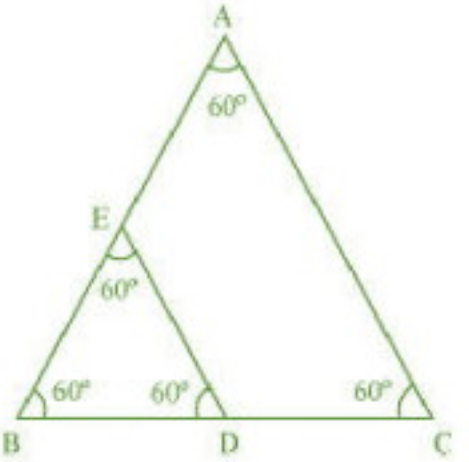
$$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta DBF)} = \left(\frac{a}{\sqrt{2}a}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

प्रश्न 8:

ABC और BDE दो समबाहु त्रिभुज इस प्रकार हैं कि D भुजा BC का मध्य-बिंदु है। त्रिभुजों ABC और BDE के क्षेत्रफलों का अनुपात है:

(A) 2:1 (B) 1:2 (C) 4:1 (D) 1:4

उत्तर 8:



दोनों त्रिभुज समबाहु त्रिभुज हैं। अतः दोनों त्रिभुजों के प्रत्येक कोण 60° के हैं। इस प्रकार AAA समरूप प्रमेय से ΔBCA ~ ΔBDE
माना ΔABC की भुजा की लंबाई = x
इसलिए, ΔBDE की भुजा की लंबाई = x/2

$$\frac{ar(\Delta ABC)}{ar(\Delta BDE)} = \left(\frac{x}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{4}{1}$$

अतः, विकल्प (C) सही है।

प्रश्न 9:

दो समरूप त्रिभुजों की भुजाएँ 4:9 के अनुपात में हैं। इन त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात है:

(A) 2:3 (B) 4:9 (C) 81:16 (D) 16:81

उत्तर 9:

हम जानते हैं कि समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के वर्गों के अनुपात के बराबर होता है।
इसलिए, त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात $= \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81}$
अतः, विकल्प (D) सही है।