गणित

(www.tiwariacademy.com)

(पाठ – 5) (समांतर श्रेढ़ी)

(कक्षा 10)

प्रश्नावली 5.2

प्रश्न 1:

निम्नलिखित सारणी में, रिक्त स्थानों को भरिए, जहाँ AP का प्रथम पद a, सार्व अंतर d और nवाँ पद a_n है:

	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	...
(ii)	−18	...	10	0
(iii)	...	−3	18	−5
(iv)	−18.9	2.5	...	3.6
(v)	3.5	0	105	...

उत्तर 1:

(i) यहाँ, $a = 7,\ d = 3$ तथा $n = 8$ है, इसलिए $a_n = a + (n-1)d$ में मान रखने पर

$a_n = 7 + (8-1)(3)$

$\Rightarrow a_n = 7 + 21 = 28$

(ii) यहाँ, $a = -18,\ n = 10$ तथा $a_n = 0$ है, इसलिए $a_n = a + (n-1)d$ में मान रखने पर

$0 = -18 + (10-1)d$

$\Rightarrow 18 = 9d \quad \Rightarrow d = 2$

(iii) यहाँ, $d = -3,\ n = 18$ तथा $a_n = -5$ है, इसलिए $a_n = a + (n-1)d$ में मान रखने पर

$-5 = a + (18-1)(-3)$

$\Rightarrow -5 = a - 51$

$\Rightarrow a = 46$

(iv) यहाँ, $a = -18.9,\ d = 2.5$ तथा $a_n = 3.6$ है, इसलिए $a_n = a + (n-1)d$ में मान रखने पर

$3.6 = -18.9 + (n-1)(2.5)$

$\Rightarrow 3.6 = -18.9 + 2.5n - 2.5$

$\Rightarrow 2.5n = 3.6 + 21.4 = 25.0$

$\Rightarrow n = 10$

(v) यहाँ, $a = 3.5,\ d = 0$ तथा $n = 105$ है, इसलिए $a_n = a + (n-1)d$ में मान रखने पर

$a_n = 3.5 + (105-1)(0)$

$\Rightarrow a_n = 3.5 + 0 = 3.5$

प्रश्न 2:

निम्नलिखित में सही उत्तर चुनिए और उसका औचित्य दीजिए:

(i) A.P.: 10, 7, 4, ..., का 30वाँ पद है:

(A) 97 (B) 77 (C) −77 (D) −87

(ii) A.P.: $-3,\ -\frac{1}{2},\ 2, \ldots$, का 11वाँ पद है:

(A) 28 (B) 22 (C) −38 (D) $-48\frac{1}{2}$

उत्तर 2:

(i) यहाँ, $a = 10,\ d = 7 - 10 = -3$ तथा $n = 30$ है,

इसलिए $a_n = a + (n-1)d$ में मान रखने पर

$a_{30} = 10 + (30-1)(-3)$

$\Rightarrow a_{30} = 10 - 87 = -77$

अतः, विकल्प (C) सही है।

(ii) यहाँ, $a = -3,\ d = -\frac{1}{2} - (-3) = \frac{5}{2}$ तथा $n = 11$ है,
इसलिए $a_n = a + (n-1)d$ में मान रखने पर
$a_{11} = -3 + (11-1)\left(\frac{5}{2}\right)$
$\Rightarrow a_{11} = -3 + 25 = 22$
अतः, विकल्प (B) सही है।

प्रश्न 3:
निम्नलिखित समांतर श्रेढ़ियों में, रिक्त खानों (boxes) के पदों को ज्ञात कीजिए:
(i) 2, __, 26
(ii) __, 13, __, 3
(iii) 5, __, __, $9\frac{1}{2}$
(iv) −4, __, __, __, __, 6
(v) __, 38, __, __, __, 22

उत्तर 3:
(i) यहाँ, दिया है $a = 2$ तथा $a_3 = 26$ है, ज्ञात करना है: a_2
दिया है: $a_3 = a + (3-1)d = 26$
$\Rightarrow 2 + 2d = 26$
$\Rightarrow d = 12$
इसलिए $a_2 = a + (2-1)d = 2 + 12 = 14$

(ii) यहाँ, दिया है $a_2 = 13$ तथा $a_4 = 3$ है, ज्ञात करना है: a_1 तथा a_3
दिया है: $a_2 = a + (2-1)d = 13$
$\Rightarrow a + d = 13$
$\Rightarrow a = 13 - d$ ... (1)
तथा $a_4 = 3 \quad \Rightarrow a + 3d = 3$
समीकरण (1) से a का मान रखने पर
$13 - d + 3d = 3 \quad \Rightarrow d = -5$
समीकरण (1) में d का मान रखने पर
$a = 13 - (-5) = 18$
इसलिए $a_1 = 18$ तथा $a_3 = a + (3-1)d = 18 + 2(-5) = 8$

(iii) यहाँ, दिया है $a = 5$ तथा $a_4 = 9\frac{1}{2}$ है, ज्ञात करना है: a_2 तथा a_3
दिया है: $a_4 = a + (4-1)d = 9\frac{1}{2}$
$\Rightarrow 5 + 3d = \frac{19}{2} \quad \Rightarrow 3d = \frac{19}{2} - 5 = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow d = \frac{3}{2}$
इसलिए $a_2 = a + d = 5 + \frac{3}{2} = 6\frac{1}{2}$ तथा $a_3 = a + 2d = 5 + 2\left(\frac{3}{2}\right) = 8$
(iv) यहाँ, दिया है $a = -4$ तथा $a_6 = 6$ है, ज्ञात करना है: $a_2,\ a_3,\ a_4$ तथा a_5
दिया है: $a_6 = a + (6-1)d = 6$
$\Rightarrow -4 + 5d = 6 \quad \Rightarrow 5d = 10 \quad \Rightarrow d = 2$
इसलिए $a_2 = a + d = -4 + 2 = -2$
$a_3 = a + 2d = -4 + 2(2) = 0$
$a_4 = a + 3d = -4 + 3(2) = 2$
$a_5 = a + 4d = -4 + 4(2) = 4$

(v) यहाँ, दिया है $a_2 = 38$ तथा $a_6 = -22$ है, ज्ञात करना है: $a_1,\ a_3,\ a_4$ तथा a_5
दिया है: $a_2 = a + (2-1)d = 38$
$\Rightarrow a + d = 38$
$\Rightarrow a = 38 - d$ ... (1)
तथा $a_6 = -22$ $\Rightarrow a + 5d = -22$
समीकरण (1) से a का मान रखने पर
$38 - d + 5d = -22$ $\Rightarrow d = -15$
समीकरण (1) में d का मान रखने पर
$a = 38 - (-15) = 53$
इसलिए $a_1 = a = 53$
$a_3 = a + 2d = 53 + 2(-15) = 23$
$a_4 = a + 3d = 53 + 3(-15) = 8$
$a_5 = a + 4d = 53 + 4(-15) = -7$

प्रश्न 4:

A.P.: 3, 8, 13, 18, ... का कौन सा पद 78 है?

उत्तर 4:

यहाँ, $a = 3$ तथा $d = 8 - 3 = 5$ है,
माना, A.P. का nवाँ पद 78 है।
इसलिए $a_n = 78$
$\Rightarrow a + (n-1)d = 78$
$\Rightarrow 3 + (n-1)(5) = 78$
$\Rightarrow (n-1)(5) = 75$
$\Rightarrow n - 1 = 15$
$\Rightarrow n = 16$
अतः, A.P.: 3, 8, 13, 18, ... का 16वाँ पद 78 है।

प्रश्न 5:

निम्नलिखित समांतर श्रेढ़ियों में से प्रत्येक श्रेढ़ी में कितने पद हैं?

(i) $7, 13, 19, \ldots, 205$ **(ii)** $18, 15\frac{1}{2}, 13, \ldots, -47$

उत्तर 5:

(i) यहाँ, $a = 7$ तथा $d = 13 - 7 = 6$ है,
माना, समांतर श्रेढ़ी में n पद हैं।
इसलिए $a_n = 205$
$\Rightarrow a + (n-1)d = 205$
$\Rightarrow 7 + (n-1)(6) = 205$
$\Rightarrow (n-1)(6) = 198$
$\Rightarrow n - 1 = 33$
$\Rightarrow n = 34$
अतः, समांतर श्रेढ़ी में 34 पद हैं।

(ii) यहाँ, $a = 18$ तथा $d = 15\frac{1}{2} - 18 = -\frac{5}{2}$ है,
माना, समांतर श्रेढ़ी में n पद हैं।
इसलिए $a_n = -47$
$\Rightarrow a + (n-1)d = -47$

$\Rightarrow 18 + (n-1)\left(-\frac{5}{2}\right) = -47$
$\Rightarrow (n-1)\left(-\frac{5}{2}\right) = -65$
$\Rightarrow n - 1 = 26$
$\Rightarrow n = 27$
अतः, समांतर श्रेढ़ी में 27 पद हैं।

प्रश्न 6:

क्या A.P., 11, 8, 5, 2, ... का एक पद −150 है? क्यों?

उत्तर 6:

यहाँ, $a = 11$ तथा $d = 8 - 11 = -3$ है,
माना, A.P. का nवाँ पद −150 है।
इसलिए $a_n = -150$
$\Rightarrow a + (n-1)d = -150$
$\Rightarrow 11 + (n-1)(-3) = -150$
$\Rightarrow 11 - 3n + 3 = -150$
$\Rightarrow -3n = -164$
$\Rightarrow n = \frac{164}{3} = 54\frac{2}{3}$
यहाँ, n एक पूर्णांक संख्या नहीं हैं। अतः, −150, A.P., 11, 8, 5, 2, ... का पद नहीं है।

प्रश्न 7:

उस A.P का 31वाँ पद ज्ञात कीजिए, जिसका 11वाँ पद 38 है और 16वाँ पद 73 है।

उत्तर 7:

यहाँ, दिया है $a_{11} = 38$ तथा $a_{16} = 73$ है, ज्ञात करना है: a_{31}

दिया है: $a_{11} = a + (11-1)d = 38$
$\Rightarrow a + 10d = 38$
$\Rightarrow a = 38 - 10d$ ... (1)
तथा $a_{16} = 73$
$\Rightarrow a + 15d = 73$

समीकरण (1) से a का मान रखने पर
$38 - 10d + 15d = 73$
$\Rightarrow 5d = 35$
$\Rightarrow d = 7$

समीकरण (1) में d का मान रखने पर
$a = 38 - 10(7) = -32$
इसलिए, $a_{31} = a + 30d = -32 + 30(7) = 178$
अतः, A.P का 31वाँ पद 178 है।

प्रश्न 8:

एक A.P. में 50 पद हैं, जिसका तीसरा पद 12 है और अंतिम पद 106 है। इसका 29वाँ पद ज्ञात कीजिए।

उत्तर 8:

यहाँ, दिया है $a_3 = 12$ तथा $a_{50} = 106$ है, ज्ञात करना है: a_{29}
दिया है: $a_3 = a + (3-1)d = 12$
$\Rightarrow a + 2d = 12$
$\Rightarrow a = 12 - 2d$ ... (1)
तथा $a_{50} = 106$
$\Rightarrow a + 49d = 106$
समीकरण (1) से a का मान रखने पर
$12 - 2d + 49d = 106$
$\Rightarrow 47d = 94$
$\Rightarrow d = 2$
समीकरण (1) में d का मान रखने पर
$a = 12 - 2(2) = 8$
इसलिए, $a_{29} = a + 28d = 8 + 28(2) = 64$
अतः, A.P का 29वाँ पद 64 है।

प्रश्न 9:

यदि किसी A.P. के तीसरे और नौवें पद क्रमशः 4 और −8 हैं, तो इसका कौन-सा पद शून्य होगा?

उत्तर 9:

यहाँ, दिया है $a_3 = 4$ तथा $a_9 = -8$ है, ज्ञात करना है: n, जहाँ $a_n = 0$.
दिया है: $a_3 = a + (3-1)d = 4$
$\Rightarrow a + 2d = 4$
$\Rightarrow a = 4 - 2d$ ... (1)
तथा $a_9 = -8$
$\Rightarrow a + 8d = -8$
समीकरण (1) से a का मान रखने पर
$4 - 2d + 8d = -8$
$\Rightarrow 6d = -12 \quad \Rightarrow d = -2$
समीकरण (1) में d का मान रखने पर
$a = 4 - 2(-2) = 8$
इसलिए, $a_n = 0$ में मान रखने पर
$a_n = a + (n-1)d = 0$
$\Rightarrow 8 + (n-1)(-2) = 0$
$\Rightarrow n - 1 = 4 \quad \Rightarrow n = 5$
अतः, इस A.P का 5वाँ पद शून्य होगा।

प्रश्न 10:

किसी A.P. का 17वाँ पद उसके 10वें पद से 7 अधिक है। इसका सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

उत्तर 10:

माना, पहला पद = a तथा सार्व अंतर = d
प्रश्नानुसार, $a_{17} = a_{10} + 7$
$\Rightarrow a + 16d = a + 9d + 7$
$\Rightarrow 7d = 7 \quad \Rightarrow d = 1$
अतः, इस A.P का सार्व अंतर 1 है।

प्रश्न 11:
A.P.: 3, 15, 27, 39, … का कौन-सा पद उसके 54वें पद से 132 अधिक होगा?

उत्तर 11:
पहला पद = 3 तथा सार्व अंतर = 15 − 3 = 12
माना, इस A.P का nवाँ पद उसके 54वें पद से 132 अधिक होगा।
प्रश्नानुसार, $a_n = a_{54} + 132$
$\Rightarrow a + (n-1)d = a + 53d + 132$
$\Rightarrow (n-1)(12) = 53 \times 12 + 132$
$\Rightarrow (n-1)(12) = 768$
$\Rightarrow n - 1 = \frac{768}{12} = 64 \qquad \Rightarrow n = 65$
अतः, इस A.P का 65वाँ पद उसके 54वें पद से 132 अधिक होगा।

प्रश्न 12:
दो समांतर श्रेढ़ियों का सार्व अंतर समान है। यदि इनके 100वें पदों का अंतर 100 है, तो इनके 1000वें पदों का अंतर क्या होगा?

उत्तर 12:
माना, पहली समांतर श्रेणी का पहला पद = A तथा सार्व अंतर = d
माना, दूसरी समांतर श्रेणी का पहला पद = a तथा सार्व अंतर = d
इनके 100वें पदों का अंतर = $A_{100} - a_{100} = 100$
$\Rightarrow (A + 99d) - (a + 99d) = 100$
$\Rightarrow A - a = 100$
इनके 1000वें पदों का अंतर = $A_{1000} - a_{1000}$
$= (A + 999d) - (a + 999d)$
$= A - a = 100 \qquad [\because A - a = 100]$
अतः, इन A.P के 1000वें पदों का अंतर 100 होगा।

प्रश्न 13:
तीन अंको वाली कितनी संख्याएँ 7 से विभाज्य हैं?

उत्तर 13:
तीन अंको वाली 7 से विभाज्य संख्याएँ: 105, 112, 119, … , 994
माना, तीन अंको वाली 7 से विभाज्य कुल संख्याएँ n हैं।
यहाँ, दिया है $a = 105$ तथा $d = 112 - 105 = 7$ है, ज्ञात करना है: n, जहाँ $a_n = 994$.
दिया है: $a_n = a + (n-1)d = 994$
$\Rightarrow 105 + (n-1)(7) = 994$
$\Rightarrow 7(n-1) = 889$
$\Rightarrow n - 1 = \frac{889}{7} = 127$
$\Rightarrow n = 128$
अतः, तीन अंको वाली 128 संख्याएँ 7 से विभाज्य हैं।

प्रश्न 14:
10 और 250 के बीच में 4 के कितने गुणज हैं?

उत्तर 14:
10 और 250 के बीच में 4 के गुणज: $12, 16, 20, \dots, 248$
माना, 10 और 250 के बीच में 4 के कुल गुणज n हैं।
यहाँ, दिया है $a = 12$ तथा $d = 16 - 12 = 4$ है, ज्ञात करना है: n, जहाँ $a_n = 248$.
दिया है: $a_n = a + (n-1)d = 248$
$\Rightarrow 12 + (n-1)(4) = 248 \quad \Rightarrow 4(n-1) = 236$
$\Rightarrow n - 1 = \frac{236}{4} = 59 \quad \Rightarrow n = 60$
अतः, 10 और 250 के बीच में 4 के 60 गुणज हैं।

प्रश्न 15:
n के किस मान के लिए, दोनों समांतर श्रेढ़ियों $63, 65, 67, \dots$ और $3, 10, 17, \dots$ के nवें पद बराबर होंगे?

उत्तर 15:
पहली समांतर श्रेणी का पहला पद $= A = 63$ तथा सार्व अंतर $= D = 65 - 63 = 2$
इसलिए, $A_n = A + (n-1)D \quad \Rightarrow A_n = 63 + (n-1)2$
दूसरी समांतर श्रेणी का पहला पद $= a = 3$ तथा सार्व अंतर $= d = 10 - 3 = 7$
इसलिए, $a_n = a + (n-1)d \quad \Rightarrow a_n = 3 + (n-1)7$
प्रश्नानुसार, $A_n = a_n$
$\Rightarrow 63 + (n-1)2 = 3 + (n-1)7 \quad \Rightarrow 63 + 2n - 2 = 3 + 7n - 7$
$\Rightarrow 65 = 5n \quad \Rightarrow \text{n} = 13$
अतः, दोनों समांतर श्रेढ़ियों के 13वें पद बराबर होंगे हैं।

प्रश्न 16:
वह A.P. ज्ञात कीजिए जिसका तीसरा पद 16 है और 7वाँ पद 5वें पद से 12 अधिक है।

उत्तर 16:
माना, समांतर श्रेणी का पहला पद $= a$ तथा सार्व अंतर $= d$
तीसरा पद $= 16$
$\Rightarrow a_3 = 16 \quad \Rightarrow a + 2d = 16 \quad \dots (1)$
7वाँ पद 5वें पद से 12 अधिक है। इसलिए, $a_7 = a_5 + 12$
$\Rightarrow a + 6d = a + 4d + 12$
$\Rightarrow 2d = 12 \quad \Rightarrow d = 6$
समीकरण (1) में d का मान रखने पर, $a + 2(6) = 16$
$\Rightarrow a = 4$
अतः, A.P. $= a,\ a + d,\ a + 2d, \dots = 4, 10, 16, \dots$

प्रश्न 17:
A.P.: $3, 8, 13, \dots, 253$ में अंतिम पद से 20वाँ पद ज्ञात कीजिए।

उत्तर 17:
$3, 8, 13, \dots, 253$ में अंतिम पद से 20वाँ पद = $253, \dots, 13, 8, 3$ में आरंभ से 20वाँ पद
A.P.: $253, \dots, 13, 8, 3$ में, पहला पद $= 253$ तथा सार्व अंतर $= 3 - 8 = -5$
इसलिए, $a_{20} = a + 19d$
$\Rightarrow a_{20} = 253 + 19(-5) = 253 - 95 = 158$

प्रश्न 18:

किसी A.P. के चौथे और 8वें पदों का योग 24 है तथा छठे और 10वें पदों का योग 44 है। इस A.P. के प्रथम तीन पद ज्ञात कीजिए।

उत्तर 18:

माना, A.P. का पहला पद $= a$ तथा सार्व अंतर $= d$

पहली शर्त के अनुसार, $a_4 + a_8 = 24$

$\Rightarrow a + 3d + a + 7d = 24$

$\Rightarrow 2a + 10d = 24 \quad \Rightarrow a + 5d = 12$

$\Rightarrow a = 12 - 5d$ ... (1)

दूसरी शर्त के अनुसार, $a_6 + a_{10} = 44$

$\Rightarrow a + 5d + a + 9d = 44$

$\Rightarrow 2a + 14d = 44 \quad \Rightarrow a + 7d = 22$

समीकरण (1) से a का मान रखने पर,

$(12 - 5d) + 7d = 22$

$\Rightarrow 2d = 10 \quad \Rightarrow d = 5$

समीकरण (1) में d का मान रखने पर, $a = 12 - 5(5) = -13$

इस A.P. के प्रथम तीन पद: $a, a + d, a + 2d = -13, -8, -3$ हैं।

प्रश्न 19:

सुब्बा राव ने 1995 में ₹5000 के मासिक वेतन पर कार्य आरंभ किया और प्रत्येक वर्ष ₹200 की वेतन वृद्धि प्राप्त की। किस वर्ष में उनका वेतन ₹7000 हो गया?

उत्तर 19:

आरंभिक मासिक वेतन $= a =$ ₹5000 तथा प्रत्येक वर्ष वेतन वृद्धि (सार्व अंतर) $= d =$ ₹200

माना, n वर्ष में उनका वेतन ₹7000 हो गया।

इसलिए, $a_n = 7000$

$\Rightarrow a + (n - 1)d = 7000$

$\Rightarrow 5000 + (n - 1)(200) = 7000$

$\Rightarrow (n - 1)(200) = 2000$

$\Rightarrow n - 1 = 10 \quad \Rightarrow n = 11$

अतः, 11वें वर्ष में उनका वेतन ₹7000 हो गया।

प्रश्न 20:

रामकली ने किसी वर्ष के प्रथम सप्ताह में ₹5 की बचत की और फिर अपनी साप्ताहिक बचत ₹1.75 बढ़ाती गई। यदि nवें सप्ताह में उसकी साप्ताहिक बचत ₹20.75 हो जाती है, तो n ज्ञात कीजिए।

उत्तर 20:

प्रथम सप्ताह की बचत $= a =$ ₹5 तथा बढ़ाई गई साप्ताहिक बचत (सार्व अंतर) $= d =$ ₹1.75

n वर्ष में साप्ताहिक बचत ₹20.75 हो जाती है।

इसलिए, $a_n = 20.75$

$\Rightarrow a + (n - 1)d = 20.75$

$\Rightarrow 5 + (n - 1)(1.75) = 20.75$

$\Rightarrow (n - 1)(1.75) = 15.75$

$\Rightarrow n - 1 = \frac{15.75}{1.75} = 9 \quad \Rightarrow n = 10$

अतः, n का मान 10 है।