गणित

(www.tiwariacademy.com)

(पाठ – 3) (दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म)

(कक्षा 10)

प्रश्नावली 3.6

प्रश्न 1:

निम्न समीकरणों के युग्मों को रैखिक समीकरणों के युग्म में बदल करके हल कीजिए:

(i) $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}=2;\ \frac{1}{3x}+\frac{1}{2y}=\frac{13}{6}$

(ii) $\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{y}}=2;\ \frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{9}{\sqrt{y}}=-1$

(iii) $\frac{4}{x}+3y=14;\ \frac{3}{x}-4y=23$

(iv) $\frac{5}{x-1}+\frac{1}{y-2}=2;\ \frac{6}{x-1}+\frac{3}{y-2}=1$

(v) $\frac{7x-2y}{xy}=5;\ \frac{8x+7y}{xy}=15$

(vi) $6x+3y=6xy;\ 2x+4y=5xy$

(vii) $\frac{10}{x+y}+\frac{2}{x-y}=4;\ \frac{15}{x+y}-\frac{5}{x-y}=-2$

(viii) $\frac{1}{3x+y}+\frac{1}{3x-y}=\frac{3}{4};\ \frac{1}{2(3x+y)}-\frac{1}{2(3x-y)}=\frac{-1}{8}$

उत्तर 1:

(i) $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}=2$ ... (1)

$\frac{1}{3x}+\frac{1}{2y}=\frac{13}{6}$ ... (2)

माना, $\frac{1}{x}=a$ तथा $\frac{1}{y}=b$ ... (3)

समीकरण (1) से

$\frac{a}{2}+\frac{b}{3}=2$

$\Rightarrow 3a+2b=12$

$\Rightarrow a=\frac{12-2b}{3}$ ... (4)

समीकरण (2) से

$\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{13}{6}$

$\Rightarrow 2a+3b=13$

समीकरण (4) से a का मान रखने पर

$2\left(\frac{12-2b}{3}\right)+3b=13$

$\Rightarrow 24-4b+9b=39$

$\Rightarrow 5b=15 \quad \Rightarrow b=3$

b का मान समीकरण (4) में रखने पर

$a=\frac{12-2(3)}{3}=2$

समीकरण (3) से

$\frac{1}{x}=2$ तथा $\frac{1}{y}=3$

$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$ तथा $y=\frac{1}{3}$

अतः, $x=\frac{1}{2}$ तथा $y=\frac{1}{3}$ है।

(ii) $\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{y}}=2$ ... (1)

$\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{9}{\sqrt{y}}=-1$ ... (2)

माना, $\frac{1}{\sqrt{x}}=a$ तथा $\frac{1}{\sqrt{y}}=b$ ... (3)

www.tiwariacademy.com
A Free web support in education

समीकरण (1) से

$2a + 3b = 2$

$\Rightarrow a = \frac{2-3b}{2}$ ... (4)

समीकरण (2) से

$4a - 9b = -1$

समीकरण (4) से a का मान रखने पर

$4\left(\frac{2-3b}{2}\right) - 9b = -1$

$\Rightarrow 4 - 6b - 9b = -1$

$\Rightarrow -15b = -5$

$\Rightarrow b = \frac{1}{3}$

b का मान समीकरण (4) में रखने पर

$a = \frac{2 - 3\left(\frac{1}{3}\right)}{2} = \frac{1}{2}$

समीकरण (3) से

$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$ तथा $\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow x = 4$ तथा $y = 9$

अतः, $x = 4$ तथा $y = 9$ है।

(iii) $\frac{4}{x} + 3y = 14$ ... (1)

$\frac{3}{x} - 4y = 23$ ... (2)

माना, $\frac{1}{x} = a$ ... (3)

समीकरण (1) से

$4a + 3y = 14$

$\Rightarrow a = \frac{14-3y}{4}$ ... (4)

समीकरण (2) से

$3a - 4y = 23$

समीकरण (4) से a का मान रखने पर

$3\left(\frac{14-3y}{4}\right) - 4y = 23$

$\Rightarrow 42 - 9b - 16y = 92$

$\Rightarrow -25y = 50$

$\Rightarrow y = -2$

y का मान समीकरण (4) में रखने पर

$a = \frac{14 - 3(-2)}{4} = 5$

समीकरण (3) से

$\frac{1}{x} = 5 \quad \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

अतः, $x = \frac{1}{5}$ तथा $y = -2$ है।

(iv) $\frac{5}{x-1}+\frac{1}{y-2}=2$ ... (1)

$\frac{6}{x-1}-\frac{3}{y-2}=1$ ... (2)

माना, $\frac{1}{x-1}=a$ तथा $\frac{1}{y-2}=b$ ... (3)

समीकरण (1) से

$5a+b=2$

$\Rightarrow b=2-5a$ ... (4)

समीकरण (2) से, $6a-3b=1$

समीकरण (4) से b का मान रखने पर

$6a-3(2-5a)=1$

$\Rightarrow 6a-6+15a=1$

$\Rightarrow 21a=7 \quad \Rightarrow a=\frac{1}{3}$

a का मान समीकरण (4) में रखने पर

$b=2-5\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$

समीकरण (3) से

$\frac{1}{x-1}=\frac{1}{3}$ तथा $\frac{1}{y-2}=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow x-1=3$ तथा $y-2=3$

$\Rightarrow x=4$ तथा $y=5$

अतः, $x=4$ तथा $y=5$ है।

(v) $\frac{7x-2y}{xy}=5 \Rightarrow \frac{7x}{xy}-\frac{2y}{xy}=5 \Rightarrow \frac{7}{y}-\frac{2}{x}=5$ ... (1)

$\frac{8x+7y}{xy}=15 \Rightarrow \frac{8x}{xy}+\frac{7y}{xy}=15 \Rightarrow \frac{8}{y}+\frac{7}{x}=15$ ... (2)

माना, $\frac{1}{x}=a$ तथा $\frac{1}{y}=b$ ... (3)

समीकरण (1) से, $7b-2a=5$

$\Rightarrow 7b=5+2a$

$\Rightarrow b=\frac{5+2a}{7}$ ... (4)

समीकरण (2) से, $8b+7a=15$

समीकरण (4) से b का मान रखने पर

$8\left(\frac{5+2a}{7}\right)+7a=15$

$\Rightarrow 40+16a+49a=105$

$\Rightarrow 65a=65 \quad \Rightarrow a=1$

a का मान समीकरण (4) में रखने पर

$b=\frac{5+2(1)}{7}=1$

समीकरण (3) से

$\frac{1}{x}=1$ तथा $\frac{1}{y}=1 \Rightarrow x=1$ तथा $y=1$

अतः, $x=1$ तथा $y=1$ है।

(vi) $6x + 3y = 6xy \Rightarrow \frac{6x+3y}{xy} = 6 \Rightarrow \frac{6x}{xy} + \frac{3y}{xy} = 6 \Rightarrow \frac{6}{y} + \frac{3}{x} = 6$ ... (1)

$2x + 4y = 5xy \Rightarrow \frac{2x+4y}{xy} = 5 \Rightarrow \frac{2x}{xy} + \frac{4y}{xy} = 5 \Rightarrow \frac{2}{y} + \frac{4}{x} = 5$ ... (2)

माना, $\frac{1}{x} = a$ तथा $\frac{1}{y} = b$ ... (3)

समीकरण (1) से, $6b + 3a = 6$

$\Rightarrow 6b = 6 - 3a$

$\Rightarrow b = \frac{6-3a}{6}$ ... (4)

समीकरण (2) से,

$2b + 4a = 5$

समीकरण (4) से b का मान रखने पर

$2\left(\frac{6-3a}{6}\right) + 4a = 5$

$\Rightarrow 12 - 6a + 24a = 30$

$\Rightarrow 18a = 18 \quad \Rightarrow a = 1$

a का मान समीकरण (4) में रखने पर

$b = \frac{6-3(1)}{6} = \frac{1}{2}$

समीकरण (3) से

$\frac{1}{x} = 1$ तथा $\frac{1}{y} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1$ तथा $y = 2$

अतः, $x = 1$ तथा $y = 1$ है।

(vii) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4$ ... (1)

$\frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$ ... (2)

माना, $\frac{1}{x+y} = a$ तथा $\frac{1}{x-y} = b$ ... (3)

समीकरण (1) से,

$10a + 2b = 4$

$\Rightarrow 2b = 4 - 10a$

$\Rightarrow b = \frac{4-10a}{2}$ ... (4)

समीकरण (2) से, $15a - 5b = -2$

समीकरण (4) से b का मान रखने पर

$15a - 5\left(\frac{4-10a}{2}\right) = -2$

$\Rightarrow 30a - 20 + 50a = -4$

$\Rightarrow 80a = 16$

$\Rightarrow a = \frac{1}{5}$

a का मान समीकरण (4) में रखने पर

$b = \frac{4 - 10\left(\frac{1}{5}\right)}{2} = 1$

समीकरण (3) से

$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow x + y = 5$ ... (5)

तथा $\frac{1}{x-y} = 1 \quad \Rightarrow x - y = 1$ ... (6)

समीकरण (5) और (6) को जोड़ने पर

$2x = 6 \quad \Rightarrow x = 3$

समीकरण (5) से

$3 + y = 5$

$\Rightarrow y = 2$

अतः, $x = 3$ तथा $y = 2$ है।

(viii) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4}$ ... (1)

$\frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{-1}{8}$ ... (2)

माना, $\frac{1}{3x+y} = a$ तथा $\frac{1}{3x-y} = b$ ... (3)

समीकरण (1) से,

$a + b = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow b = \frac{3}{4} - a$

$\Rightarrow b = \frac{3-4a}{4}$ ... (4)

समीकरण (2) से,

$\frac{a}{2} - \frac{b}{2} = -\frac{1}{8}$

समीकरण (4) से b का मान रखने पर

$\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{3-4a}{4}\right) = -\frac{1}{8}$

$\Rightarrow 4a - 3 + 4a = -1$

$\Rightarrow 8a = 2$

$\Rightarrow a = \frac{1}{4}$

a का मान समीकरण (4) में रखने पर

$b = \frac{3 - 4\left(\frac{1}{4}\right)}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

समीकरण (3) से

$\frac{1}{3x+y} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow 3x + y = 4$ ... (5)

तथा $\frac{1}{3x-y} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow 3x - y = 2$ ... (6)

समीकरण (5) और (6) को जोड़ने पर

$6x = 6 \quad \Rightarrow x = 1$

समीकरण (5) से

$3 + y = 4 \quad \Rightarrow y = 1$

अतः, $x = 1$ तथा $y = 1$ है।

प्रश्न 2:

निम्न समस्याओं में रैखिक समीकरण युग्म के रूप में व्यक्त कीजिए और फिर उनके हल ज्ञात कीजिए:

(i) रितु धारा के अनुकूल 2 घंटे में 20 km तैर सकती है और धारा के प्रतिकूल 2 घंटे में 4 km तैर सकती है। उसकी स्थिर जल में तैरने की चाल तथा धारा की चाल ज्ञात कीजिए।

(ii) 2 महिलाएँ एवं 5 पुरुष एक कसीदे के काम को साथ-साथ 4 दिन में पूरा कर सकते हैं, जबकि 3 महिलाएँ एवं 6 पुरुष इसको 3 दिन में पूरा कर सकते हैं। ज्ञात कीजिए कि इसी कार्य को करने में एक अकेली महिला कितना समय लेगी। पुनः इसी कार्य को करने में एक पुरुष कितना समय लेगा।

(iii) रूही 300 km दूरी पर स्थित अपने घर जाने के लिए कुछ दूरी रेलगाड़ी द्वारा तथा कुछ दूरी बस द्वारा तय करती है। यदि वह 60 km रेलगाड़ी द्वारा तथा शेष बस द्वारा यात्रा करती है तो उसे 4 घंटे लगते हैं। यदि वह 100 km रेलगाड़ी से तथा शेष बस से यात्रा करे, तो उसे 10 मिनट अधिक लगते हैं। रेलगाड़ी एवं बस की क्रमशः चाल ज्ञात कीजिए।

उत्तर 2:

(i) माना, रितु की स्थिर जल में तैरने की चाल = x km/h
माना, धारा की चाल = y km/h
धारा के अनुकूल, चाल = $x + y$ km/h, दूरी = 20 km, समय = 2 घंटे
प्रश्नानुसार, चाल = दूरी/ समय

$$x + y = \frac{20}{2}$$

$$\Rightarrow y = 10 - x \quad \ldots (1)$$

धारा के प्रतिकूल, चाल = $x - y$ km/h, दूरी = 4 km, समय = 2 घंटे

$$x - y = \frac{4}{2} \quad \Rightarrow x - y = 2$$

समीकरण (1) से y का मान रखने पर

$$x - (10 - x) = 2$$

$$\Rightarrow 2x = 12 \quad \Rightarrow x = 6$$

समीकरण (1) में x का मान रखने पर

$$y = 10 - 6 = 4$$

अतः, रितु की स्थिर जल में तैरने की चाल 6 km/h तथा धारा की चाल 4 km/h है।

(ii) माना, एक महिला द्वारा कार्य को पूरा करने में लिए गए कुल दिन = x
माना, एक पुरुष द्वारा कार्य को पूरा करने में लिए गए कुल दिन = y
इसलिए, एक महिला द्वारा एक दिन में किया गया कार्य = $\frac{1}{x}$
एक पुरुष द्वारा एक दिन में किया गया कार्य = $\frac{1}{y}$
पहली शर्त के अनुसार

$$4\left(\frac{2}{x} + \frac{5}{y}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{8}{x} + \frac{20}{y} = 1 \quad \ldots (1)$$

दूसरी शर्त के अनुसार

$3\left(\frac{3}{x}+\frac{6}{y}\right)=1$

$\Rightarrow \frac{9}{x}+\frac{18}{y}=1$ ... (2)

माना, $\frac{1}{x}=a$ तथा $\frac{1}{y}=b$ ... (3)

समीकरण (1) से

$8a+20b=1$

$\Rightarrow a=\frac{1-20b}{8}$ ... (4)

समीकरण (2) से

$9a+18b=1$

समीकरण (4) से a का मान रखने पर

$9\left(\frac{1-20b}{8}\right)+18b=1$

$\Rightarrow 9-180b+144b=8$

$\Rightarrow -36b=-1 \quad \Rightarrow b=\frac{1}{36}$

b का मान समीकरण (4) में रखने पर

$a=\frac{1-20\left(\frac{1}{36}\right)}{8}=\frac{4}{72}=\frac{1}{18}$

समीकरण (3) से

$\frac{1}{x}=\frac{1}{18}$ तथा $\frac{1}{y}=\frac{1}{36}$

$\Rightarrow x=18$ तथा $y=36$

अतः, कार्य को करने में एक अकेली महिला 18 दिन लेगी तथा कार्य को करने में एक पुरुष 36 दिन लेगा।

(iii) माना, रेलगाड़ी की चाल = x km/h

माना, बस की चाल = y km/h

यदि वह 60 km रेलगाड़ी द्वारा तथा शेष बस द्वारा यात्रा करती है तो उसे 4 घंटे लगते हैं।

चाल = दूरी/ समय, प्रश्नानुसार,

$\frac{60}{x}+\frac{240}{y}=4$ ... (1)

यदि वह 100 km रेलगाड़ी से तथा शेष बस से यात्रा करे, तो उसे 10 मिनट अधिक लगते हैं।

प्रश्नानुसार,

$\frac{100}{x}+\frac{200}{y}=4+\frac{10}{60}$

$\Rightarrow \frac{100}{x}+\frac{200}{y}=\frac{25}{6}$ ... (2)

माना, $\frac{1}{x}=a$ तथा $\frac{1}{y}=b$ ... (3)

समीकरण (1) से

$60a+240b=4$

$\Rightarrow a=\frac{4-240b}{60}$ ... (4)

समीकरण (2) से

$100a + 200b = \frac{25}{6}$

समीकरण (4) से a का मान रखने पर

$100\left(\frac{4 - 240b}{60}\right) + 200b = \frac{25}{6}$

$\Rightarrow 40 - 2400b + 1200b = 25$

$\Rightarrow -1200b = -15 \quad \Rightarrow b = \frac{1}{80}$

b का मान समीकरण (4) में रखने पर

$a = \frac{4 - 240\left(\frac{1}{80}\right)}{60} = \frac{1}{60}$

समीकरण (3) से

$\frac{1}{x} = \frac{1}{60}$ तथा $\frac{1}{y} = \frac{1}{80}$

$\Rightarrow x = 60$ तथा $y = 80$

अतः, रेलगाड़ी की चाल 60 km/h तथा बस की चाल 80 km/h है।