

प्रश्न 1:

सत्यापित कीजिए कि निम्न त्रिघात बहुपदों के साथ दी गई संख्याएँ उसकी शून्यक हैं। प्रत्येक स्थिति में शून्यांकों और गुणांकों के बीच संबंध को भी सत्यापित कीजिए:

(i). $2x^3 + x^2 - 5x + 2$; $\frac{1}{2}, 1, -2$

(ii). $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$; $2, 1, 1$

उत्तर 1:

(i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2$; $\frac{1}{2}, 1, -2$

माना $p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$

इसलिए, $p\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{2}\right) + 2$

$= 2 \times \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 5 \times \frac{1}{2} + 2$

$= \frac{2}{4} - \frac{5}{2} + 2$

$= \frac{5}{2} - \frac{5}{2} = 0$

इसलिए, $\frac{1}{2}$, $p(x)$ का शून्यक है।

अब, $p(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 5(1) + 2$

$= 2 \times 1 + 1 - 5 \times 1 + 2$

$= 3 - 5 + 2$

$= 5 - 5 = 0$

इसलिए, 1 , $p(x)$ का शून्यक है।

अब, $p(-2) = 2(-2)^3 + (-2)^2 - 5(-2) + 2$

$= 2 \times (-8) + 4 + 10 + 2$

$= -16 + 4 + 10 + 2$

$= -16 + 16 = 0$

इसलिए, -2 , $p(x)$ का शून्यक है।

इसप्रकार, $\frac{1}{2}, 1$ और -2 , $p(x)$ के शून्यक हैं।

अब, माना $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 1$ तथा $\gamma = -2$

$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2} + 1 + (-2) = \frac{3-4}{2} = \frac{-1}{2} = \frac{-(1)}{2} = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{1}{2} \times 1 + 1 \times (-2) + (-2) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 2 - 1 = \frac{-5}{2} = \frac{-5}{2} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

$\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2} \times 1 \times (-2) = -1 = \frac{-2}{2} = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$

इसप्रकार, शून्यांकों और गुणांकों के बीच संबंध सत्यापित हुआ।

(ii) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$; $2, 1, 1$

माना $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

इसलिए, $p(2) = (2)^3 - 4(2)^2 + 5(2) - 2 = 8 - 16 + 10 - 2 = 18 - 18 = 0$

इसलिए, 2 , $p(x)$ का शून्यक है।

$$\begin{aligned}\text{अब, } p(1) &= (1)^3 - 4(1)^2 + 5(1) - 2 \\ &= 1 - 4 + 5 - 2 \\ &= 6 - 6 = 0\end{aligned}$$

इसलिए, 1, $p(x)$ का शून्यक है।

इसप्रकार, 2, 1 और 1, $p(x)$ के शून्यक हैं।

अब, माना $\alpha = 2, \beta = 1$ तथा $\gamma = 1$

$$\alpha + \beta + \gamma = 2 + 1 + 1 = 4 = \frac{-(-1)}{1} = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 2 = 2 + 1 + 2 = 5 = \frac{5}{1} = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

$$\alpha\beta\gamma = 2 \times 1 \times 1 = 2 = \frac{-(-2)}{1} = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

इसप्रकार, शून्यांकों और गुणांकों के बीच संबंध सत्यापित हुआ।

प्रश्न 2:

एक त्रिघात बहुपद प्राप्त कीजिए जिसके शून्यांकों का योग, दो शून्यांकों को एक साथ लेकर उनके गुणनफल का योग तथा तीनों शून्यांकों के गुणनफल क्रमशः 2, -7, -14 हों।

उत्तर 2:

माना $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ एक त्रिघात बहुपद है और α, β तथा γ बहुपद के शून्यांक हैं दिया है,

$$\alpha + \beta + \gamma = 2$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -7$$

$$\alpha\beta\gamma = -14$$

हम जानते हैं कि,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}}, \quad \alpha\beta\gamma = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

इसलिए,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}} = \frac{-b}{a} = \frac{2}{1}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{x \text{ का गुणांक}}{x^3 \text{ का गुणांक}} = \frac{c}{a} = \frac{-7}{1}$$

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}} = \frac{-d}{a} = \frac{-14}{1}$$

तुलना करने पर, $a = 1, b = -2, c = -7$ और $d = 14$

अतः, त्रिघात बहुपद $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ अर्थात् $p(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + 14$ होगा।

प्रश्न 3:

यदि बहुपद $x^3 - 3x^2 + x + 1$ के शून्यक $a - b$, a , $a + b$ हों, तो a और b ज्ञात कीजिए।

उत्तर 3:

हम जानते हैं कि,

$$\text{मूलों का योगफल} = \frac{-(x^2 \text{ का गुणांक})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

इसलिए,

$$(a - b) + a + (a + b) = \frac{-(-3)}{1}$$

$$\Rightarrow 3a = 3$$

$$\Rightarrow a = 1$$

$$\text{मूलों का गुणनफल} = \frac{-(\text{अचर पद})}{x^3 \text{ का गुणांक}}$$

इसलिए,

$$(a - b)(a)(a + b) = \frac{-(1)}{1}$$

$$\Rightarrow (1 - b)1(1 + b) = -1$$

$$\Rightarrow 1 - b^2 = -1$$

$$\Rightarrow b^2 = 2 \Rightarrow b = \pm\sqrt{2}$$

इस प्रकार, $a = 1$ और $b = \pm\sqrt{2}$

[क्योंकि $a = 1$]

प्रश्न 4:

यदि बहुपद $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 13x - 35$ के दो शून्यक $2 \pm \sqrt{3}$ हों, तो अन्य शून्यक ज्ञात कीजिए।

उत्तर 4:

माना $p(x) = x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 13x - 35$

दिया है, $2 + \sqrt{3}$ और $2 - \sqrt{3}$ बहुपद $p(x)$ के दो शून्यक हैं
इसलिए, $(x - 2 - \sqrt{3})$ और $(x - 2 + \sqrt{3})$ बहुपद $p(x)$ के दो गुणखंड हैं।

इसलिए, $(x - 2)^2 - (\sqrt{3})^2$ बहुपद $p(x)$ का गुणखंड है।
अर्थात् $x^2 - 4x + 1$ बहुपद $p(x)$ का गुणखंड है।

$$[\text{क्योंकि } (x - 2)^2 - (\sqrt{3})^2 = x^2 - 4x + 1]$$

इसप्रकार,

$$p(x) = x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 13x - 35$$

$$= (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 2x - 35)$$

$$= (x^2 - 4x + 1)(x^2 - 7x + 5x - 35)$$

$$= (x^2 - 4x + 1)[x(x - 7) + 5(x - 7)]$$

$$= (x^2 - 4x + 1)(x + 5)(x - 7)$$

अन्य शून्यक प्राप्त करने के लिए $x + 5 = 0$ और $x - 7 = 0$ रखने पर, $x = -5$ और $x = 7$

इसप्रकार, अन्य शून्यक $x = -5$ और $x = 7$ हैं।

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x - 35 \\ x^2 - 4x + 1 \overline{) x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 13x - 35} \\ \underline{x^4 - 4x^3 + x^2} \\ -2x^3 - 27x^2 + 13x - 35 \\ \underline{-2x^3 + 8x^2 - 2x} \\ -35x^2 + 140x - 35 \\ \underline{-35x^2 + 140x - 35} \\ 0 \end{array}$$

प्रश्न 5:

यदि बहुपद $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ को एक अन्य बहुपद $x^2 - 2x + k$ से भाग दिया जाए और शेषफल $x + a$ आता हो, तो k तथा a ज्ञात कीजिए।

उत्तर 5:

दिया है

$$\text{भाजक} = x^2 - 2x + k$$

$$\text{भाज्य} = x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$$

$$\text{शेषफल} = x + a$$

हम जानते हैं कि

$$\text{भाज्य} = \text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेषफल}$$

इसलिए,

$$x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10 = (x^2 - 2x + k) \times \text{भागफल} + (x + a)$$

$$x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10 - (x + a) = (x^2 - 2x + k) \times \text{भागफल}$$

$$\Rightarrow \frac{x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 26x + 10 - a}{x^2 - 2x + k} = \text{भागफल}$$

इसप्रकार, यदि बहुपद $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 26x + 10 - a$ को बहुपद $x^2 - 2x + k$ से भाग दिया जाए तो शेषफल 0 होगा।

तुलना करने पर,

$$-10 + 2k = 0$$

$$\Rightarrow 2k = 10$$

$$\Rightarrow k = 5$$

और

$$10 - a - 8k + k^2 = 0$$

$$\Rightarrow 10 - a - 8 \times 5 + 5^2 = 0 \quad [\text{क्योंकि } k = 5]$$

$$\Rightarrow 10 - a - 40 + 25 = 0$$

$$\Rightarrow -a - 5 = 0$$

$$\Rightarrow a = -5$$

इस प्रकार, $k = 5$ और $a = -5$

$$\begin{array}{r} x^2 - 4x + (8 - k) \\ x^2 - 2x + k \overline{) x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 26x + 10 - a} \\ \underline{x^4 - 2x^3 + kx^2} \\ -4x^3 + (16 - k)x^2 - 26x \\ \underline{-4x^3 + 8x^2 - 4kx} \\ (8 - k)x^2 - (26 - 4k)x + 10 - a \\ \underline{(8 - k)x^2 - (16 - 2k)x + (8k - k^2)} \\ (-10 + 2k)x + (10 - a - 8k + k^2) \end{array}$$