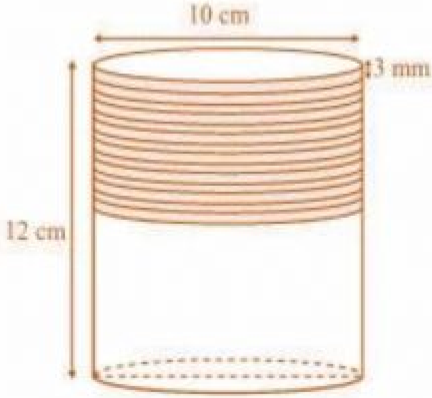
प्रश्नावली 13.5

प्रश्न 1:

व्यास 3 mm वाले ताँबे के एक तार को 12 cm लंबे और 10 cm व्यास वाले एक बेलन पर इस प्रकार लपेटा जाता है कि वह बेलन के वक्र पृष्ठ को पूर्णतया ढक लेता है। तार की लंबाई और द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, यह मानते हुए कि ताँबे का घनत्व 8.88g प्रति cm^3 है।

उत्तर 1:



एक बार लपेटने में तार, बेलन के 3 mm ऊँचाई को ढक लेगा।

इसलिए कुल लपेटे गए चक्करों की संख्या = $\frac{\text{बेलन की ऊँचाई}}{\text{तार का व्यास}} = \frac{12}{0.3} = 40$

एक बार लपेटने में तार की कुल लंबाई = बेलन के आधार की परिधि

$= 2\pi r = 2\pi \times 5 = 10\pi$

40 बार लपेटने में तार की कुल लंबाई = $40 \times 10\pi$

$= \frac{400 \times 22}{7} = \frac{8800}{7}$

= 1257.14 cm = 12.57 m

तार की त्रिज्या = 0.15 cm

तार का आयतन = तार के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल × लंबाई

$= \pi\,(0.15)^2 \times 1257.14 = 88.898\ cm^3$

द्रव्यमान = आयतन × घनत्व = 88.898 × 8.88 = 789.41 gm

प्रश्न 2:

एक समकोण त्रिभुज, जिसकी भुजाएँ 3 cm और 4 cm हैं (कर्ण के अतिरिक्त), को उसके कर्ण के परितः घुमाया जाता है। इस प्रकार प्राप्त द्वि-शंकु (double cone) के आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (π का मान जो भी उपयुक्त लगे, प्रयोग कीजिए।)

उत्तर 2:

समकोण त्रिभुज को उसके कर्ण के परितः घुमाने से प्राप्त द्वि-शंकु ऊपर दिया है।

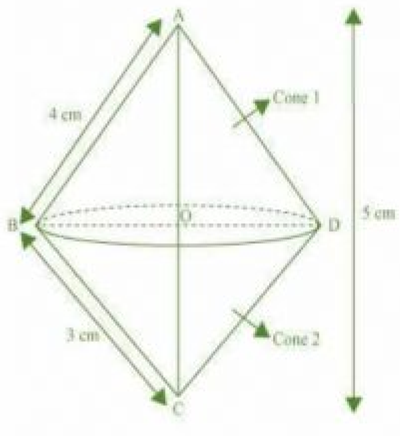
कर्ण $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5\ cm$

समकोण त्रिभुज का क्षेत्रफल $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times AB \times AC$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times AC \times OB = \frac{1}{2} \times 4 \times 3$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 5 \times OB = 6$

$\Rightarrow OB = \frac{12}{5} = 2.4$ cm



द्वि-शंकु का आयतन = शंकु 1 का आयतन + शंकु 2 का आयतन

$= \frac{1}{3}\pi r^2 h_1 + \frac{1}{3}\pi r^2 h_2$

$= \frac{1}{3}\pi r^2 (h_1 + h_2) = \frac{1}{3}\pi r^2 (OA + OC)$

$\frac{1}{3} \times 3.14 \times (2.4)^2 (5)$

$= 30.14\ cm^3$

द्वि-शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल = शंकु 1 का पृष्ठीय क्षेत्रफल + शंकु 2 का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= \pi r l_1 + \pi r l_2 = \pi r\,[4 + 3]$

$= 3.14 \times 2.4 \times 7 = 52.75\ cm^2$.

प्रश्न 3:

एक टंकी, जिसके आंतरिक मापन 150 cm × 120 cm × 110 cm हैं, में 129600 cm^3 पानी है। इस पानी में कुछ छिद्र वाली ईंटे तब डाली जाती हैं, जब तक कि टंकी पूरी ऊपर तक भर न जाए। प्रत्येक ईंट अपने आयतन का $\frac{1}{17}$ पानी सोख लेती है। यदि प्रत्येक ईंट की माप 22.5 cm × 7.5 cm × 6.5 cm हैं, तो टंकी में कुल कितनी ईंटे डाली जा सकती हैं, ताकि उसमें से पानी बाहर न बहे?

उत्तर 3:

टंकी का आयतन = 150 × 120 × 110 = 1980000 cm^3

टंकी में मौजूद पानी का आयतन = 129600 cm^3

टंकी में भरी जाने वाली ईंटों का का आयतन = 1980000 – 129600 = 1850400 cm^3

माना छिद्र वाली ईंटों की संख्या = n

इसलिए, n ईंटों का का आयतन = n × 22.5 × 7.5 × 6.5 = 1096.875 n

क्योंकि प्रत्येक ईंट अपने आयतन का $\frac{1}{17}$ पानी सोख लेती है इसलिए, n ईंटों द्वारा सोखा गया पानी का आयतन $= \frac{n}{17} \times 1096.875$

प्रश्नानुसार,

$$18504000 + \frac{n}{17} \times 1096.875 = 1096.875n$$

$$\Rightarrow 18504000 = \frac{16n}{17} \times 1096.875n \quad \Rightarrow n = 1792.41$$

अतः, टंकी में कुल 1792 ईंटे डाली जा सकती हैं, ताकि उसमें से पानी बाहर न बहे।

प्रश्न 4:

किसी महीने के 15 दिनों में, एक नदी की घाटी में 10 cm वर्षा हुई। यदि इस घाटी का क्षेत्रफल 7280 km^2 है, तो दर्शाइए कि कुल वर्षा लगभग तीन नदियों के सामान्य पानी के योग के समतुल्य थी, जबकि प्रत्येक नदी 1072 km लम्बी, 75 m चौड़ी और 3 m गहरी है।

उत्तर 4:

घाटी में हुई वर्षा = 10 cm = 0.1 m और घाटी का क्षेत्रफल = 97280 km^2 = 97280000000 m^2

वर्षा के पानी का आयतन = 97280000000×0.1 = 9728000000 m^3

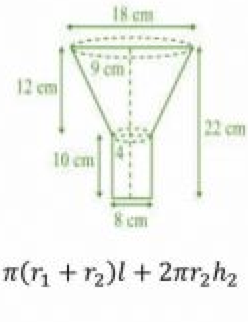
एक नदी के पानी का आयतन = 1072000×75×3 = 241200000 m^3

तीन नदियों के पानी का आयतन = 3×241200000 = 843600000 m^3

इसप्रकार, 9728000000 m^3 ≈ 843600000 m^3

प्रश्न 5:

टीन की बनी हुई एक तेल की कुप्पी 10 cm लंबे एक बेलन में एक शंकु के छिन्नक को जोड़ने से बनी है। यदि इसकी कुल ऊँचाई 22 cm है, बेलनाकार भाग का व्यास 8 cm है और कुप्पी के ऊपरी सिरे का व्यास 18 cm है, तो इसके बनाने में लगी टीन के चादर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (देखिए आकृति)



उत्तर 5:

छिन्नक के ऊपरी भाग की त्रिज्या (r_1) = 9 cm और छिन्नक के निचले भाग की त्रिज्या (r_2) = 4 cm

इसलिए, बेलनाकार भाग की त्रिज्या = 4 cm

छिन्नक की ऊँचाई (h_1) = 22 – 10 = 12 cm

बेलनाकार भाग ऊँचाई (h_2) = 10 cm

छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई (l) $= \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2} = \sqrt{(9-4)^2 + 12^2} = 13$ cm

टीन के चादर का क्षेत्रफल = छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + बेलनाकार भाग का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi(r_1 + r_2)l + 2\pi r_2 h_2$

$$= \frac{22}{7} \times (9+4) \times 13 + 2 \times \frac{22}{7} \times 4 \times 10$$

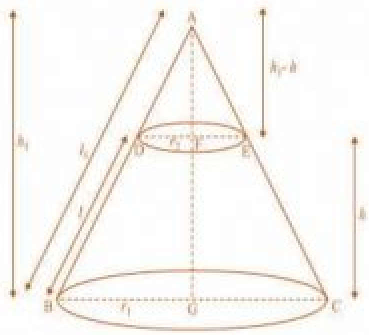
$$= \frac{22}{7}[169 + 80] = \frac{22 \times 249}{7} = 782\frac{4}{7}\ cm^2$$

प्रश्न 6:

शंकु के एक छिन्नक के लिए, पूर्व स्पष्ट किए संकेतों का प्रयोग करते हुए, वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल और सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल के सूत्रों को सिद्ध कीजिए।

उत्तर 6:

माना ABC एक शंकु है जिससे एक छिन्नक बनाया गया है। माना r_1 और r_2 दोनों सिरों की त्रिज्याएँ हैं तथा इसकी उँचाई h है।
ΔABG और ΔADF में, $DF || BG$



$\therefore \Delta ABG \sim \Delta ADF$

$$\frac{DF}{BG} = \frac{AF}{AG} = \frac{AD}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = \frac{h_1 - h}{h_1} = \frac{l_1 - l}{l_1} \qquad \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = 1 - \frac{h}{h_1} = 1 - \frac{l}{l_1}$$

$$\Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = 1 - \frac{l}{l_1} \qquad \Rightarrow \frac{l}{l_1} = 1 - \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_1 - r_2}{r_1}$$

$$\Rightarrow \frac{l_1}{l} = \frac{r_1}{r_1 - r_2} \qquad \Rightarrow l_1 = \frac{r_1 l}{r_1 - r_2}$$

छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = शंकु ABC का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल – शंकु ADE का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r_1 l_1 - \pi r_2 (l_1 - l)$

$$= \pi r_1 \left(\frac{r_1 l}{r_1 - r_2}\right) - \pi r_2 \left(\frac{r_1 l}{r_1 - r_2} - l\right) = \frac{\pi r_1^2 l}{r_1 - r_2} - \pi r_2 \left(\frac{r_1 l - r_1 l + r_2 l}{r_1 - r_2}\right)$$

$$= \frac{\pi r_1^2 l}{r_1 - r_2} - \frac{\pi r_2^2 l}{r_1 - r_2} = \pi l \left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 - r_2}\right) = \pi (r_1 + r_2) l$$

छिन्नक का सम्पूर्ण क्षेत्रफल = छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + ऊपरी आधार का क्षेत्रफल + निचले आधार का क्षेत्रफल

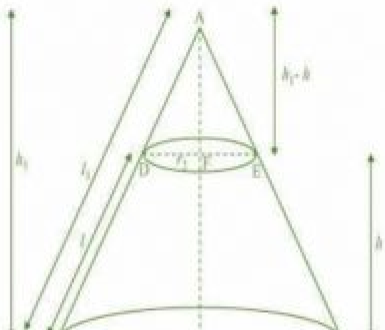
$$= \pi (r_1 + r_2) l + \pi r_2^2 + \pi r_1^2$$

प्रश्न 7:

शंकु के एक छिन्नक के लिए, पूर्व स्पष्ट किए संकेतों का प्रयोग करते हुए, आयतन का सूत्र सिद्ध कीजिए।

उत्तर 7:

माना ABC एक शंकु है जिससे एक छिन्नक बनाया गया है। माना r_1 और r_2 दोनों सिरों की त्रिज्याएँ हैं तथा इसकी उँचाई h है।
ΔABG और ΔADF में, $DF || BG \therefore \Delta ABG \sim \Delta ADF$



$$\frac{DF}{BG} = \frac{AF}{AG} = \frac{AD}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = \frac{h_1 - h}{h_1} = \frac{l_1 - l}{l_1} \qquad \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = 1 - \frac{h}{h_1} = 1 - \frac{l}{l_1}$$

$$\Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = 1 - \frac{h}{h_1} \qquad \Rightarrow \frac{h}{h_1} = 1 - \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_1 - r_2}{r_1}$$

$$\Rightarrow \frac{h_1}{h} = \frac{r_1}{r_1 - r_2} \qquad \Rightarrow h_1 = \frac{r_1 h}{r_1 - r_2}$$

छिन्नक का आयतन = शंकु ABC का आयतन – शंकु ADE का आयतन

$$= \frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1 - \frac{1}{3}\pi r_2^2 (h_1 - h) \qquad = \frac{1}{3}\pi [r_1^2 h_1 - r_2^2 (h_1 - h)]$$

$$= \frac{1}{3}\pi \left[r_1^2 \left(\frac{r_1 h}{r_1 - r_2}\right) - r_2^2 \left(\frac{r_1 h}{r_1 - r_2} - h\right)\right] \quad = \frac{1}{3}\pi \left[\frac{r_1^3 h}{r_1 - r_2} - r_2^2 \left(\frac{r_1 h - r_1 h + r_2 h}{r_1 - r_2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\pi \left[\frac{r_1^3 h}{r_1 - r_2} - \frac{r_2^3 h}{r_1 - r_2}\right] \quad = \frac{1}{3}\pi h \left[\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1 - r_2}\right] \quad = \frac{1}{3}\pi h \left[\frac{(r_1 - r_2)(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}{r_1 - r_2}\right] \quad = \frac{1}{3}\pi h (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$$