गणित

(www.tiwariacademy.com)
(पाठ – 13) (पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन)
(कक्षा 10)

प्रश्नावली 13.3

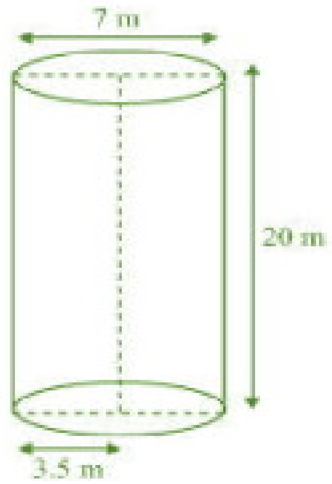
प्रश्न 1:
त्रिज्या 4.2 cm वाले धातु के एक गोले को पिघलाकर त्रिज्या 6 cm वाले एक बेलन के रूप में ढाला जाता है। बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर 1:
धातु के गोले की त्रिज्या (r_1) = 4.2 cm
बेलन की त्रिज्या (r_2) = 4.2 cm
माना बेलन की ऊँचाई = h
प्रश्नानुसार, गोले का आयतन = बेलन का आयतन
$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \pi r_2^2 h \qquad \Rightarrow \frac{4}{3}\pi(4.2)^3 = \pi(6)^2 h$
$\Rightarrow h = \frac{4}{3} \times \frac{4.2 \times 4.2 \times 4.2}{36} = 1.4 \times 1.4 \times 1.4 = 2.74\, cm$
अतः, बेलन की ऊँचाई 2.74 cm है।

प्रश्न 2:
क्रमशः 6 cm, 8 cm और 10 cm त्रिज्याओं वाले धातु के तीन ठोस गोलों को पिघलकर एक बड़ा ठोस गोला बनाया जाता है। इस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर 2:
पहले गोले की त्रिज्या (r_1) = 6 cm
दूसरे गोले की त्रिज्या (r_2) = 8 cm
तीसरे गोले की त्रिज्या (r_3) = 10 cm
माना नए गोले की त्रिज्या = r
प्रश्नानुसार, तीन ठोस गोलों का आयतन = नए गोले का आयतन
$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi(r_1^3 + r_2^3 + r_3^3) = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \Rightarrow \frac{4}{3}\pi(6^3 + 8^3 + 10^3) = \frac{4}{3}\pi r^3$
$\Rightarrow 216 + 512 + 1000 = r^3 \qquad \Rightarrow r^3 = 1728 \qquad \Rightarrow r = 12\, cm$
अतः, नए गोले की त्रिज्या 12 cm है।

प्रश्न 3:
व्यास 7 m वाला 20 m गहरा एक कुआँ खोदा जाता है और खोदने से निकली हुई मिट्टी को समान रूप से फैलाकर 22 m × 14 m वाला एक चबूतरा बनाया गया है। इस चबूतरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

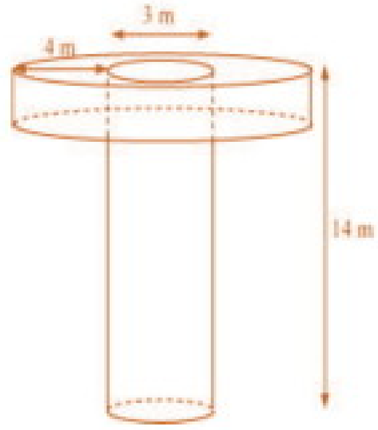
उत्तर 3:


कुँए की त्रिज्या (r) = 7/2 m, कुँए की गहराई = 20 m
चबूतरे की लंबाई = 22 m, चबूतरे की चौड़ाई = 14 m
माना चबूतरे की ऊँचाई = H
प्रश्नानुसार, कुँए से निकली हुई मिट्टी का आयतन = चबूतरे की मिट्टी का आयतन
$\pi r^2 h = 22 \times 14 \times H$
$\Rightarrow \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 \times 20 = 22 \times 14 \times H$
$\Rightarrow 11 \times 7 \times 10 = 22 \times 14 \times H \qquad \Rightarrow \frac{11 \times 7 \times 10}{22 \times 14} = H \qquad \Rightarrow H = 2.5$ m
अतः, चबूतरे की ऊँचाई 2.5 m है।

प्रश्न 4:

व्यास 3 m का एक कुआँ 14 m की गहराई तक खोदा जाता है। इससे निकली हुई मिट्टी को कुएँ के चारों ओर 4 m चौड़ी एक वृत्ताकार वलय (ring) बनाते हुए, समान रूप से फैलाकर एक प्रकार का बाँध बनाया जाता है। इस बाँध की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर 4:



कुँए की त्रिज्या (r) = $\frac{3}{2}$ m, कुँए की गहराई = 14 m, बाँध की चौड़ाई = 14 m

यहाँ बाँध एक खोखले बेलन के रूप में है जिसकी आंतरिक त्रिज्या = $\frac{3}{2}$ m तथा

बाह्य त्रिज्या = $\frac{3}{2} + 4 = \frac{11}{2}$ m है।

माना बाँध की ऊँचाई = H

प्रश्नानुसार, कुँए से निकली हुई मिट्टी का आयतन = बाँध की मिट्टी का आयतन

$\Rightarrow \pi r_1^2 h_1 = \pi(r_1^2 - r_2^2)h$

$\Rightarrow \pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 \times 14 = \pi\left[\left(\frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] \times h \quad \Rightarrow \frac{9}{4} \times 14 = \frac{112}{4}h \quad \Rightarrow h = \frac{9}{8} = 1.125\ m$

अतः, बाँध की ऊँचाई 1.125 m है।

प्रश्न 5:

व्यास 12 cm और ऊँचाई 15 cm वाले एक लंब वृत्तीय बेलन के आधार का बर्तन आइसक्रीम से पूरा भरा हुआ है। इस आइसक्रीम को ऊँचाई 12 cm और व्यास 6 cm वाले शंकुओं में भरा जाना है, जिनका ऊपरी सिरा अर्धगोलाकार होगा। उन शंकुओं की संख्या ज्ञात कीजिए जो इस आइसक्रीम से भरे जा सकते हैं।

उत्तर 5:

बेलन की त्रिज्या (r_1) = 12/2 = 6 cm, बेलन की ऊँचाई (h_1) = 15 cm

शंक्वाकार भाग की ऊँचाई (h_2) = 12 cm, शंक्वाकार भाग की त्रिज्या (r_2) = 6/2 = 3 cm

अर्धगोलाकार भाग की त्रिज्या (r_2) = 3 cm, माना शंकुओं की संख्या = n

इसलिए, बेलन का आयतन = n × [शंकु का आयतन + अर्धगोले का आयतन]

$\Rightarrow \pi r_1^2 h_1 = n\left(\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2 + \frac{2}{3}\pi r_2^3\right) \quad \Rightarrow 6^2 \times 15 = n\left(\frac{1}{3} \times 9 \times 12 + \frac{2}{3} \times 3^3\right)$

$\Rightarrow 36 \times 15 = n(36 + 18) \quad \Rightarrow n = \frac{36 \times 15}{54} = 10$

अतः, शंकुओं की संख्या 10 है।

प्रश्न 6:

विमाओं 5.5 cm × 10 cm × 3.5 cm वाला एक घनाभ बनाने के लिए, 1.75 cm व्यास और 2 mm मोटाई वाले कितने चाँदी के सिक्कों को पिघलाना पड़ेगा?

उत्तर 6:

चाँदी के सिक्कों की त्रिज्या (r) = 1.75/2 = 0.875 cm, चाँदी के सिक्कों की ऊँचाई (h_1) = 0.2 cm

घनाभ की लंबाई = 5.5 cm, घनाभ की चौड़ाई = 10 cm

घनाभ की ऊँचाई = 3.5 cm, माना चाँदी के सिक्कों की संख्या = n

इसलिए, n × चाँदी के एक सिक्के का आयतन = घनाभ का आयतन

$\Rightarrow n(\pi r^2 h_1) = lbh \quad \Rightarrow n \times \frac{22}{7} \times (0.875)^2 \times 0.2 = 5.5 \times 10 \times 3.5$

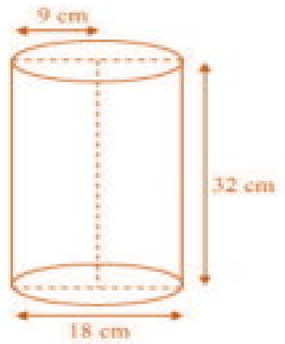
$\Rightarrow n = \frac{5.5 \times 10 \times 3.5 \times 7}{0.875 \times 0.845 \times 0.2 \times 22} \quad \Rightarrow n = 400$

अतः, चाँदी के सिक्कों की संख्या 400 है।

प्रश्न 7:

32 cm ऊँची और आधार त्रिज्या 18 cm वाली एक बेलनाकार बाल्टी रेत से भरी हुई है। इस बाल्टी को भूमि पर खाली किया जाता है और इस रेत की एक शंक्वाकार ढेरी बनाई जाती है। यदि शंक्वाकार ढेरी की ऊँचाई 24 cm है, तो इस ढेरी की त्रिज्या और तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

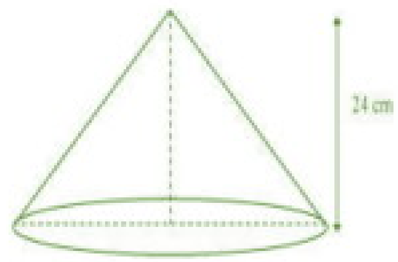
उत्तर 7:



बेलनाकार बाल्टी की त्रिज्या (r_1) = 18/2 = 9 cm
बेलनाकार बाल्टी की ऊँचाई (h_1) = 32 cm
शंक्वाकार ढेरी की ऊँचाई (h_2) = 24 cm
माना शंक्वाकार ढेरी की त्रिज्या = (r_2)
इसलिए, बेलनाकार बाल्टी में रेत का आयतन = शंक्वाकार ढेरी में रेत का आयतन

$\Rightarrow \pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2$ $\Rightarrow \pi \times 18^2 \times 32 = \frac{1}{3}\pi \times r_2^2 \times 24$

$\Rightarrow r_2^2 = \frac{3 \times 18 \times 18 \times 32}{24} = 18 \times 18 \times 4$ $\Rightarrow r_2 = 36\ cm$

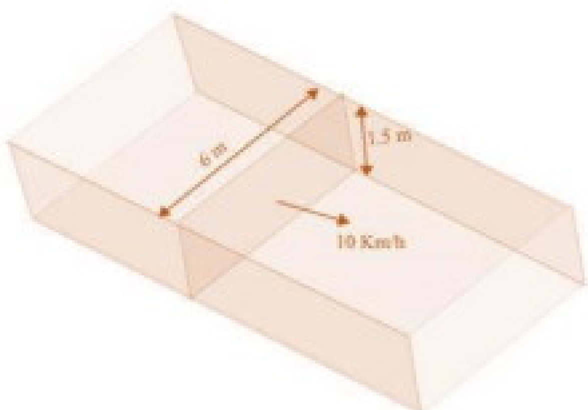


तिर्यक ऊँचाई = $\sqrt{36^2 + 24^2} = \sqrt{1296 + 576} = \sqrt{1872} = 12\sqrt{13}\ cm$
अतः, ढेरी की त्रिज्या 36cm और तिर्यक ऊँचाई $12\sqrt{13}\ cm$ है।

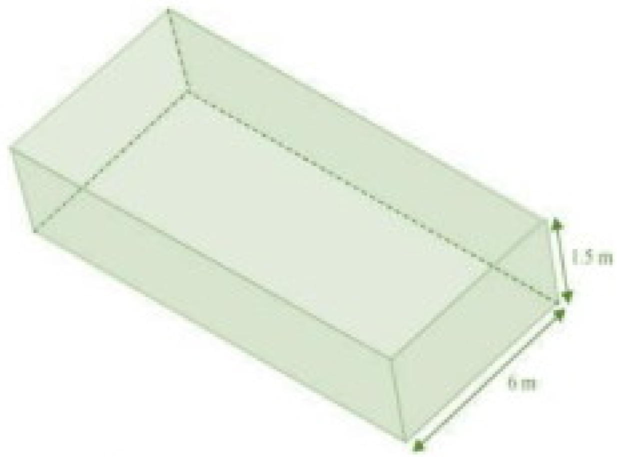
प्रश्न 8:

6 m चौड़ी और 1.5 m गहरी एक नहर में पानी 10 km/h की चाल से बह रहा है। 30 मिनट में, यह नहर कितने क्षेत्रफल की सिंचाई कर पाएगी, जबकि सिंचाई के लिए 8 cm गहरे पानी की आवश्यकता होती है।

उत्तर 8:



नहर की चौड़ाई = 6 m
नहर की गहराई = 1.5 m
पानी की चाल = 10 km/h = $\frac{1000}{60}$ m/min
1 मिनट में बहे पानी का आयतन = $6 \times 1.5 \times \frac{1000}{60}$ = $1500\ m^3$
इसलिए, 30 मिनट में बहे पानी का आयतन = $30 \times 1500 = 45000\ m^3$



माना यह नहर A क्षेत्रफल की सिंचाई कर पाएगी
इसलिए, 30 मिनट में बहे पानी का आयतन = खेत में 8 cm गहरे पानी का आयतन

$\Rightarrow 45000 = \frac{A \times 8}{100}$

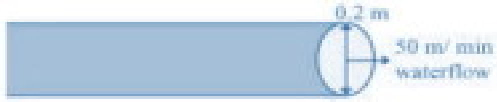
$\Rightarrow A = \frac{45000 \times 100}{8} = 562500\ m^2$

अतः, 30 मिनट में, यह नहर द्वारा सींचा गया क्षेत्रफल $562500\ m^2$ है।

प्रश्न 9:

एक किसान अपने खेत में बनी 10 m व्यास वाली और 2 m गहरी एक बेलनाकार टंकी को आंतरिक व्यास 20 cm वाले एक पाइप द्वारा एक नहर से जोड़ता है। यदि पाइप में पानी 3 km/h की चाल से बह रहा है, तो कितने समय बाद टंकी पूरी भर जाएगी?

उत्तर 9:



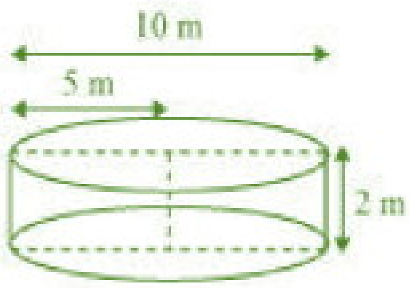
पाइप की त्रिज्या (r_1) = 20/200 = 0.1 m

पाइप के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल = $\pi {r_1}^2 = \pi(0.1)^2 = 0.01\pi\ m^3$

पानी की चाल = 3 km/h = 3000/60 = 50 m/min

पाइप द्वारा 1 मिनट में बहे पानी का आयतन = $50 \times 0.01\pi = 0.5\pi\ m^3$

पाइप द्वारा t मिनट में बहे पानी का आयतन = $t \times 0.5\pi\ m^3$



बेलनाकार टंकी की त्रिज्या (r_2) = 5 m

बेलनाकार टंकी की ऊँचाई (h_2) = 2 m

माना t मिनट में पूरा टैंक भर जायेगा।

इसलिए, t मिनट में पाइप द्वारा बहे पानी का आयतन = बेलनाकार टंकी का आयतन

$\Rightarrow t \times 0.5\pi = \pi \times (r_2)^2 \times h_2$

$\Rightarrow t \times 0.5 = 5^2 \times 2$

$\Rightarrow t = 100$

अतः, 100 मिनट में पूरा टैंक भर जायेगा।