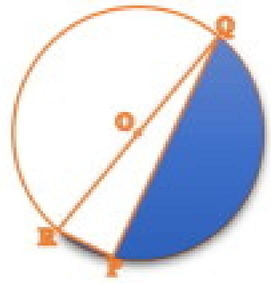
गणित

(www.tiwariacademy.com)
(पाठ – 12) (वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल)
(कक्षा 10)

प्रश्नावली 12.3

प्रश्न 1:
आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि PQ = 24 cm, PR = 7 cm तथा O वृत्त का केंद्र है। [π = 22/7 का प्रयोग कीजिए]

उत्तर 1:


QR व्यास है अतः, $\angle RPQ = 90^\circ$ [क्योंकि अर्धवृत्त में बना कोण समकोण होता है]

ΔPQR में, पाइथागोरस प्रमेय से,

$RP^2 + PQ^2 = RQ^2$

$(7)^2 + (24)^2 = RQ^2$

$\Rightarrow RQ^2 = 576 + 49 = 625$

$\Rightarrow RQ = \sqrt{625} = 25$

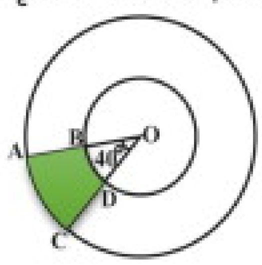
इसलिए, वृत्त की त्रिज्या = RQ/2 = 25/2 cm

छायांकित भाग का क्षेत्रफल = अर्धवृत्त का क्षेत्रफल - ΔPQR का क्षेत्रफल

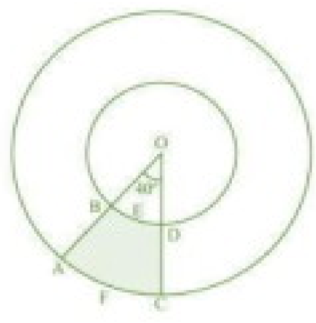
$$= \frac{1}{2} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} \times PR \times PQ = \frac{1}{2} \times \pi \left(\frac{25}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \times 7 \times 24 = \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{25}{2} \times \frac{25}{2} - 7 \times 12$$

$$= \frac{6875}{28} - 84 = \frac{6875 - 2352}{28} = \frac{4523}{28} \text{ cm}^2$$

प्रश्न 2:
आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि केंद्र O वाले दोनों सकेंद्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 7 cm और 14 cm हैं तथा $\angle AOC = 40^\circ$ है। [π = 22/7 का प्रयोग कीजिए]

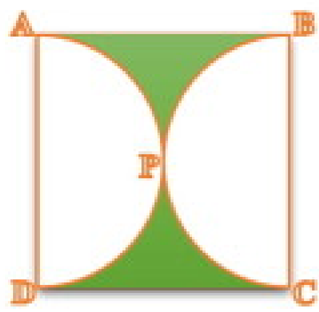
उत्तर 2:


छोटे वृत्त की त्रिज्या= 7 cm
बड़े वृत्त की त्रिज्या = 14 cm
छायांकित भाग का क्षेत्रफल
= त्रिज्यखंड OAFCO का क्षेत्रफल – त्रिज्यखंड OBEDO का क्षेत्रफल



$$= \frac{40^\circ}{360^\circ} \times \pi(14)^2 - \frac{40^\circ}{360^\circ} \times \pi(7)^2$$
$$= \frac{1}{9} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 - \frac{1}{9} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$
$$= \frac{616}{9} - \frac{154}{9} = \frac{462}{9} = \frac{154}{3} \ cm^2$$

प्रश्न 3:
आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि ABCD भुजा 14 cm का एक वर्ग है तथा APD और BPC दो अर्धवृत्त हैं। [π = 22/7 का प्रयोग कीजिए]

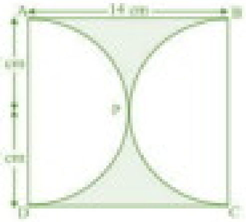
उत्तर 3:


वर्ग की भुजा 14 cm है, अतः अर्धवृत्त की त्रिज्या 7 cm होगी।

अर्धवृत्त का क्षेत्रफल
$$= \frac{1}{2} \times \pi r^2 = \frac{1}{2} \times \pi(7)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$
$$= 77 \text{ cm}^2$$

वर्ग का क्षेत्रफल

$= (\text{भुजा})^2 \quad = (14)^2 \quad = 196\ \text{cm}^2$



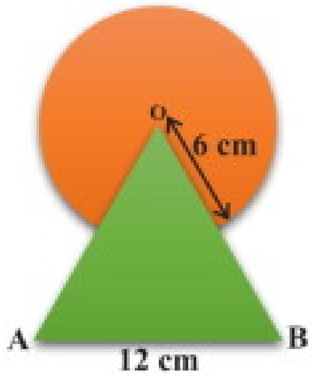
छायांकित भाग का क्षेत्रफल = वर्ग का क्षेत्रफल - अर्धवृत्तों का क्षेत्रफल

$= 196 - 2\times77 \ = 196 - 154 \ = 42\ \text{cm}^2$

प्रश्न 4:

आकृति में, छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ भुजा 12 cm वाले एक समबाहु त्रिभुज OAB के शीर्ष O को केंद्र मान कर 6 सेमी त्रिज्या वाला एक वृत्तीय चाप खींचा गया है। [π = 22/7 का प्रयोग कीजिए]

उत्तर 4:



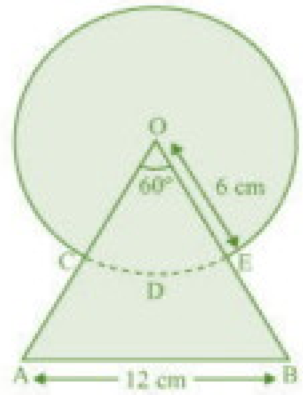
हम जानते हैं कि एक समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60° होता है।

त्रिज्यखंड OCDE का क्षेत्रफल

$= \frac{60°}{360°}\times \pi r^2 \quad = \frac{1}{6}\times\pi(6)^2 \quad = \frac{1}{6}\times\frac{22}{7}\times 6\times 6 \quad = \frac{132}{7}\ \text{cm}^2$

समबाहु त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल

$= \frac{\sqrt{3}}{4}(12)^2 \quad = 36\sqrt{3}\ \text{cm}^2$



वृत्त का क्षेत्रफल

$= \pi r^2 \quad = \pi(6)^2 \quad = \frac{22}{7}\times 6\times 6 \quad = \frac{792}{7}\ \text{cm}^2$

छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= वृत्त का क्षेत्रफल + समबाहु त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल - त्रिज्यखंड OCDE का क्षेत्रफल

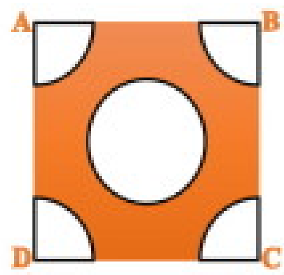
$= \left(\frac{792}{7} + 36\sqrt{3} - \frac{132}{7}\right)\ \text{cm}^2$

$= \left(36\sqrt{3} + \frac{660}{7}\right)\ \text{cm}^2$

प्रश्न 5:

भुजा 4 cm वाले एक वर्ग के प्रत्येक कोने से 1 cm त्रिज्या वाले वृत्त का एक चतुर्थांश काटा गया है तथा बीच में 2 cm व्यास का एक वृत्त भी काटा गया है, जैसाकि आकृति में दर्शाया गया है। वर्ग के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [π = 22/7 का प्रयोग कीजिए]

उत्तर 5:



प्रत्येक चतुर्थांश की त्रिज्या = 1 cm

प्रत्येक चतुर्थांश का क्षेत्रफल

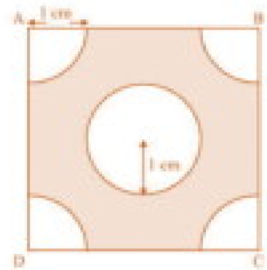
$= \frac{90°}{360°}\times\pi r^2 \quad = \frac{1}{4}\times\pi(1)^2 \quad = \frac{1}{4}\times\frac{22}{7}\times 1\times 1 \quad = \frac{11}{14}\ \text{cm}^2$

वृत्त का क्षेत्रफल

$= \pi r^2 \quad = \pi(1)^2 \quad = \frac{22}{7}\times 1\times 1 \ = \frac{22}{7}\ \text{cm}^2$

वर्ग का क्षेत्रफल

$= (\text{भुजा})^2 \quad = (4)^2 \quad = 16\ \text{cm}^2$



छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= वर्ग का क्षेत्रफल - वृत्त का क्षेत्रफल - चारों चतुर्थांशों का क्षेत्रफल

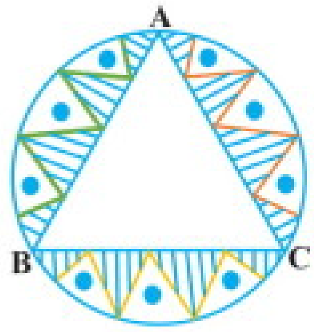
$= 16 - \frac{22}{7} - 4\times\frac{11}{14}$

$= 16 - \frac{22}{7} - \frac{22}{7}$

$= \frac{112-44}{7} = \frac{68}{7}\ \text{cm}^2$

प्रश्न 6:

एक वृत्ताकार मेज़पोश, जिसकी त्रिज्या 32 cm है, के बीच में एक समबाहु त्रिभुज ABC छोड़ते हुए एक डिज़ाइन बना हुआ है, जैसाकि आकृति में दिखाया गया है। इस डिज़ाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [π = 22/7 का प्रयोग कीजिए]



उत्तर 6:

वृत्त की त्रिज्या = 32

त्रिभुज का केन्द्रक O, मध्यिका को 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है। अतः, AO:OD = 2:1

$\Rightarrow \frac{AO}{OD} = \frac{2}{1} \quad \Rightarrow \frac{32}{OD} = \frac{2}{1} \quad \Rightarrow OD = 16$

इसलिए, AD = 32 + 16 = 48 cm

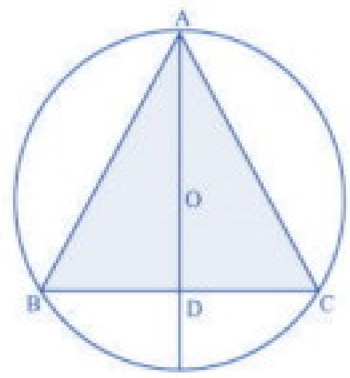
ΔABD में,

$AB^2 = AD^2 + BD^2 = (48)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{3}{4}AB^2 = (48)^2 \quad \Rightarrow \text{AB} = \frac{48 \times 2}{\sqrt{3}} = \frac{96\sqrt{3}}{3} = 32\sqrt{3}$

समबाहु त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(32\sqrt{3}\right)^2 = 768\sqrt{3}\ \text{cm}^2$



वृत्त का क्षेत्रफल

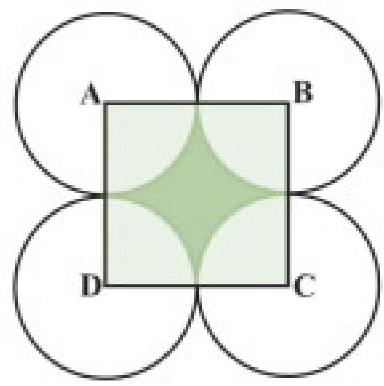
$= \pi r^2 = \pi(32)^2 = \frac{22}{7} \times 32 \times 32 = \frac{22528}{7}\ \text{cm}^2$

डिज़ाइन का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल - समबाहु त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$= \left(\frac{22528}{7} - 768\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2$

प्रश्न 7:

आकृति में, ABCD भुजा 14 cm वाला एक वर्ग है। A, B, C और D को केंद्र मानकर, चार वृत्त इस प्रकार खींचे गए हैं कि प्रत्येक वृत्त तीन शेष वृत्तों में से दो वृत्तों को बाह्य रूप से स्पर्श करता है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [π = 22/7 का प्रयोग कीजिए]



उत्तर 7:

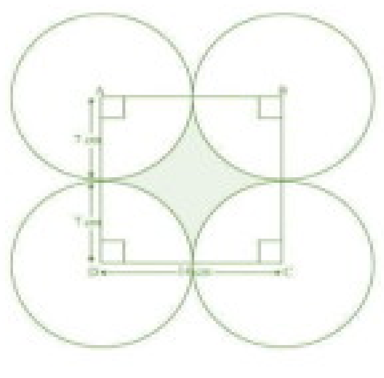
A, B, C और D को केंद्र मानकर, खींचे गए प्रत्येक वृत्त चतुर्थांश बनाते हैं जिसकी 7 cm त्रिज्या है।

प्रत्येक चतुर्थांश की त्रिज्या = 7 cm

प्रत्येक चतुर्थांश का क्षेत्रफल

$= \frac{90°}{360°} \times \pi r^2 = \frac{1}{4} \times \pi(7)^2$

$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = \frac{77}{2}\ \text{cm}^2$



वर्ग का क्षेत्रफल

$= (\text{भुजा})^2 = (14)^2 = 196\ \text{cm}^2$

छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= वर्ग का क्षेत्रफल - चारों चतुर्थांशों का क्षेत्रफल

$= 196 - 4 \times \frac{77}{2}$

$= 196 - 154$

$= 42\ \text{cm}^2$

प्रश्न 8:

आकृति एक दौड़ने का पथ (racing track) दर्शाती है, जिसके बाएँ और दाएँ सिरे अर्धवृत्ताकार हैं। दोनों आंतरिक समांतर रेखाखंडों के बीच की दूरी है तथा इनमें से प्रत्येक रेखाखंड लंबा है। यदि यह पथ चौड़ा है, तो ज्ञात कीजिए।

(i) पथ के आंतरिक किनारों के अनुदिश एक पूरा चक्कर लगाने में चली गई दूरी

(ii) पथ का क्षेत्रफल [π = 22/7 का प्रयोग कीजिए]

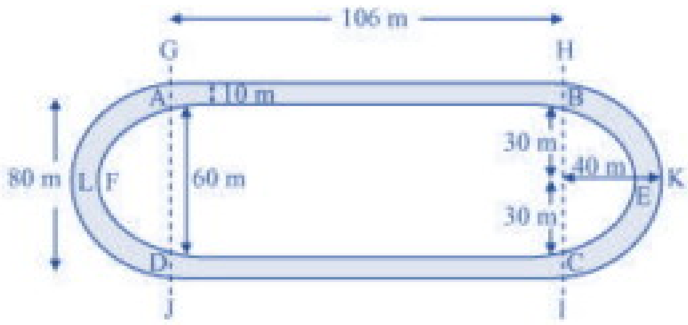
उत्तर 8:

(i) पथ के आंतरिक किनारों के अनुदिश एक पूरा चक्कर लगाने में चली गई दूरी = AB + चाप BEC + CD + चाप DFA

$= 106 + \frac{1}{2} \times 2\pi r + 106 + + \frac{1}{2} \times 2\pi r$

$= 106 + \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 30 + 106 + + \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 30$

$= 212 + 2 \times \frac{22}{7} \times 30 = 212 + \frac{1320}{7} = \frac{2804}{7}$



(ii) पथ का क्षेत्रफल = (GHIJ का क्षेत्रफल – ABCD का क्षेत्रफल) + (अर्धवृत्त HKI का क्षेत्रफल – अर्धवृत्त BEC का क्षेत्रफल) + (अर्धवृत्त GLJ का क्षेत्रफल – अर्धवृत्त AFD का क्षेत्रफल)

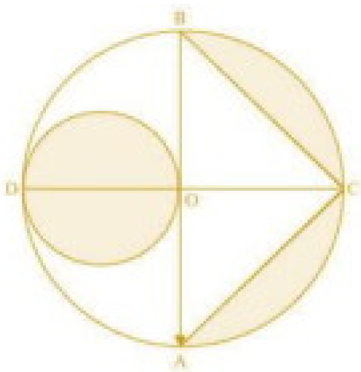
$= (106 \times 80 - 106 \times 60) + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times [(40)^2 - (30)^2] + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times [(40)^2 - (30)^2]$

$= 106(80 - 60) + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times (700) + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times (700)$

$= 2120 + \frac{22}{7} \times (700) = 2120 + +2200 = 4320$

प्रश्न 9:

आकृति में, AB और CD केंद्र O वाले एक वृत्त के दो परस्पर लंब व्यास हैं तथा OD छोटे वृत्त का व्यास है। यदि OA = 7 cm है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [π = 22/7 का प्रयोग कीजिए]



उत्तर 9:

छोटे वृत्त की त्रिज्या = 7/2 cm

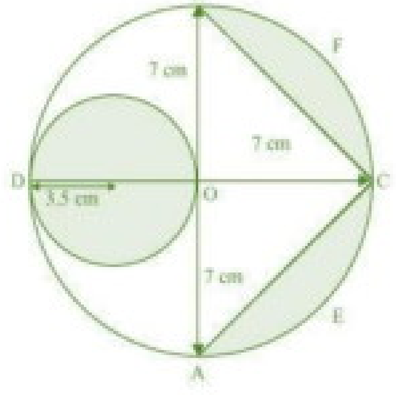
छोटे वृत्त का क्षेत्रफल

$= \pi r^2 = \pi \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} = \frac{77}{2}$ cm^2

बड़े वृत्त की त्रिज्या = 7 cm

अर्धवृत्त AECFB का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times \pi r^2 = \pi(7)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 77$ cm^2



त्रिभुज ACB का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times AB \times OC = \frac{1}{2} \times 14 \times 7 = 49$ cm^2

छायांकित भाग का क्षेत्रफल

= छोटे वृत्त का क्षेत्रफल + अर्धवृत्त AECFB का क्षेत्रफल - त्रिभुज ACB का क्षेत्रफल

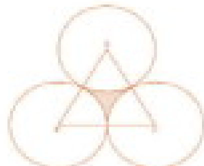
$= \left(\frac{77}{2} + 77 - 49\right)$ cm^2

= (38.5 + 28) cm^2

= 66.5 cm^2

प्रश्न 10:

एक समबाहु त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल 17320.5 cm^2 है। इस त्रिभुज के प्रत्येक शीर्ष को केंद्र मानकर त्रिभुज की भुजा के आधे के बराबर की त्रिज्या लेकर एक वृत्त खींचा जाता है (देखिए आकृति)। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [π = 3.14 और $\sqrt{3} = 1.732.5$ का प्रयोग कीजिए]

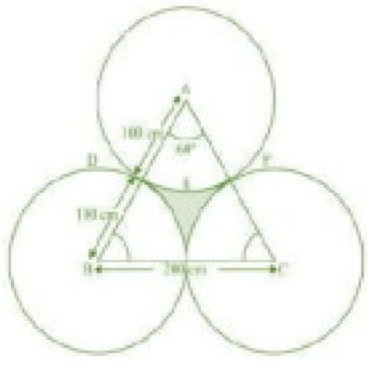


उत्तर 10:

माना समबाहु त्रिभुज की भुजा की लंबाई = a

समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = 17320.5 cm^2

$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 17320.5 \quad \Rightarrow \frac{1.73205}{4}a^2 = 17320.5 \quad \Rightarrow a^2 = 40000 \quad \Rightarrow a = 200$



त्रिज्यखंड ADEF का क्षेत्रफल

$= \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2 \quad = \frac{60°}{360°} \times \frac{22}{7}(100)^2 \quad = \frac{1}{6} \times 3.14 \times 100 \times 100 \quad = \frac{15700}{3}$ cm^2

छायांकित भाग का क्षेत्रफल = समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल - तीन त्रिज्यखंडो का क्षेत्रफल

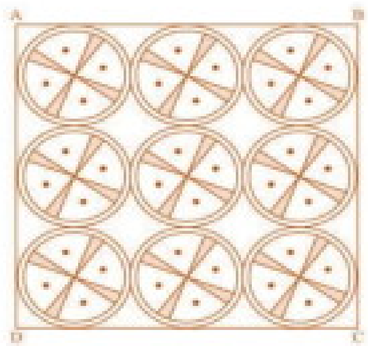
$= 17320.5\ cm^2 - 3 \times \frac{15700}{3}\ cm^2$

$= 17320.5\ cm^2 - 15700\ cm^2$

$= 1620.5\ cm^2$

प्रश्न 11:

एक वर्गाकार रूमाल पर, नौ वृताकार डिज़ाइन बने हैं, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या 7 cm है (देखिए आकृति)। रूमाल के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [π = 22/7 का प्रयोग कीजिए]



उत्तर 11:

वृत्त की त्रिज्या = 7 cm

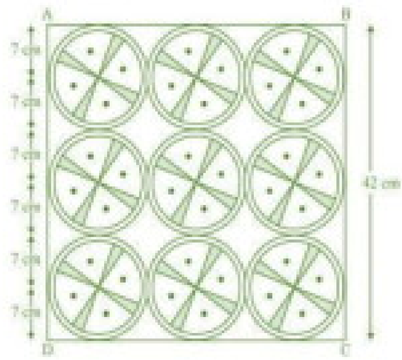
एक वृताकार डिज़ाइन का क्षेत्रफल

$= \pi r^2 \ = \pi(7)^2 \ = \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \ = 154\ cm^2$

वर्ग की भुजा = 42 cm

वर्ग का क्षेत्रफल

$= (\text{भुजा})^2 \ = (42)^2 \ = 1764 cm^2$



रूमाल के शेष भाग का क्षेत्रफल = वर्ग का क्षेत्रफल - नौ वृत्तों का क्षेत्रफल

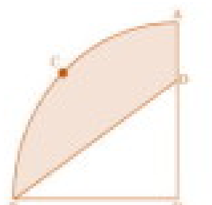
= 1764 – 9×154

= 196 – 1386

= 378 cm^2

प्रश्न 12:

आकृति में, OACB केंद्र O और त्रिज्या 3.5 cm वाले एक वृत्त का चतुर्थांश है। यदि OD = 2 cm है, तो निम्लिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए:



(i) चतुर्थांश OACD

(ii) छायांकित भाग [π = 22/7 का प्रयोग कीजिए]

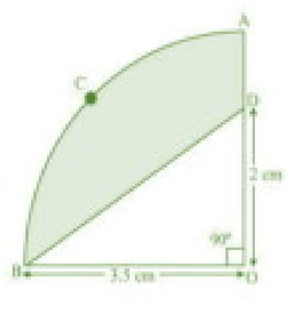
उत्तर 12:

(i) चतुर्थांश की त्रिज्या = 1 cm

चतुर्थांश का क्षेत्रफल

$= \frac{90°}{360°} \times \pi r^2 \quad = \frac{1}{4} \times \pi(3.5)^2$

$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \quad = \frac{77}{8}\ cm^2$



त्रिभुज OBD का क्षेत्रफल

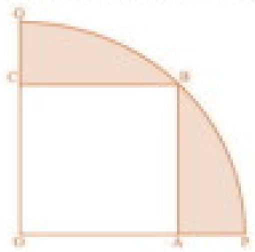
$= \frac{1}{2} \times OB \times OD \quad = \frac{1}{2} \times 3.5 \times 2 \quad = 3.5 \text{ cm}^2$

(ii) छायांकित भाग का क्षेत्रफल = चतुर्थांश का क्षेत्रफल - त्रिभुज OBD का क्षेत्रफल

$= \frac{77}{8} - 3.5 \; = \frac{77}{8} - \frac{7}{2} \; = \frac{77 - 28}{8} \; = \frac{49}{8} \; cm^2$

प्रश्न 13:

आकृति में, एक चतुर्थांश OPBQ के अंतर्गत एक वर्ग OABC बना है। यदि OA = 20 cm है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [π = 3.14 का प्रयोग कीजिए]



उत्तर 13:

ΔOAB में,

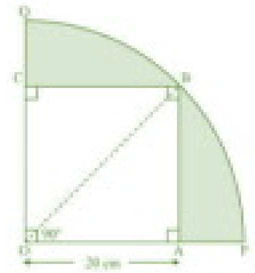
$OB^2 = OA^2 + AB^2 \quad \Rightarrow OB^2 = (20)^2 + (20)^2 \quad \Rightarrow OB^2 = 400 + 400$

$\Rightarrow OB^2 = 800 \qquad \Rightarrow OB = \sqrt{800} \qquad \Rightarrow OB = 20\sqrt{2}$

चतुर्थांश की त्रिज्या = $20\sqrt{2}$ cm

चतुर्थांश का क्षेत्रफल

$= \frac{90^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2 \quad = \frac{1}{4} \times \pi \left(20\sqrt{2}\right)^2 \quad = \frac{1}{4} \times 3.14 \times 20\sqrt{2} \times 20\sqrt{2} \quad = 628 \text{ cm}^2$



वर्ग का क्षेत्रफल

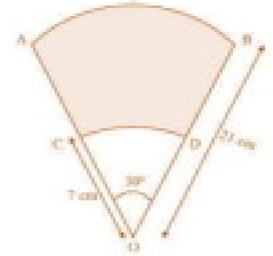
$= (\text{भुजा})^2 \quad = (20)^2 \quad = 400 \text{ cm}^2$

छायांकित भाग का क्षेत्रफल = चतुर्थांश का क्षेत्रफल - वर्ग का क्षेत्रफल

$= 628 - 400 \; = 228 \text{ cm}^2$

प्रश्न 14:

AB और CD केंद्र O तथा त्रिज्याओं 21 cm और 7 cm वाले दो संकेंद्रीय वृत्तों के क्रमशः दो चाप हैं (देखिए आकृति)। यदि ∠AOB = 30° है, तो छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
[π = 22/7 का प्रयोग कीजिए]



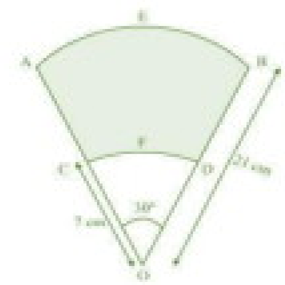
उत्तर 14:

छायांकित भाग का क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड OAEB का क्षेत्रफल – त्रिज्यखंड OCFD का क्षेत्रफल

$= \frac{30^\circ}{360^\circ} \times \pi \times (21)^2 - \frac{30^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 7^2$

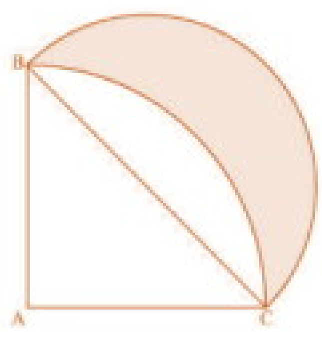
$= \frac{1}{12} \times \pi[441 - 49]$

$= \frac{1}{12} \times \frac{22}{7} \times 392 = \frac{308}{3} \; cm^2$



प्रश्न 15:

आकृति में, ABC त्रिज्या 14 cm वाले एक वृत्त का चतुर्थांश है तथा BC को व्यास मान कर एक अर्धवृत्त खींचा गया है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [π = 22/7 का प्रयोग कीजिए]



उत्तर 15:

चतुर्थांश की त्रिज्या = 14 cm

चतुर्थांश का क्षेत्रफल

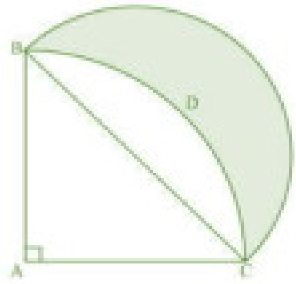
$= \frac{90^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2 \quad = \frac{1}{4} \times \pi (14)^2$

$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \quad = 154 \text{ cm}^2$

ΔABC में,

$BC^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow BC^2 = (14)^2 + (14)^2 \Rightarrow BC^2 = 196 + 196$

$\Rightarrow BC^2 = 392 \quad \Rightarrow BC = \sqrt{392} \quad \Rightarrow BC = 14\sqrt{2}$



इसलिए अर्धवृत्त का व्यास = $BC = 14\sqrt{2}$

अर्धवृत्त की त्रिज्या = $7\sqrt{2}$ cm

अर्धवृत्त का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times \pi r^2 = \frac{1}{2} \times \pi (7\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{2} \times 7\sqrt{2} = 154 \text{ cm}^2$

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times AC \times AB = \frac{1}{2} \times 14 \times 14 = 98 \text{ cm}^2$

छायांकित भाग का क्षेत्रफल

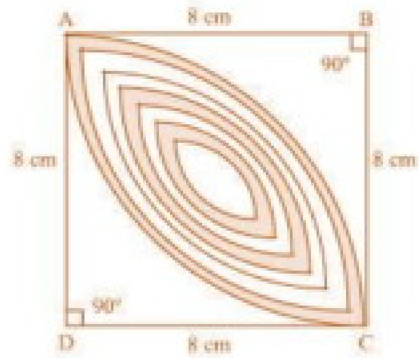
= त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल + अर्धवृत्त का क्षेत्रफल - चतुर्थांश का क्षेत्रफल

$= (98 + 154 - 154) \text{ cm}^2$

$= 98 \text{ cm}^2$

प्रश्न 16:

आकृति में, छायांकित डिज़ाइन का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जो 8 cm त्रिज्याओं वाले दो वृत्तों के चतुर्थांश के बीच उभयनिष्ठ है। [π = 22/7 का प्रयोग कीजिए]



उत्तर 16:

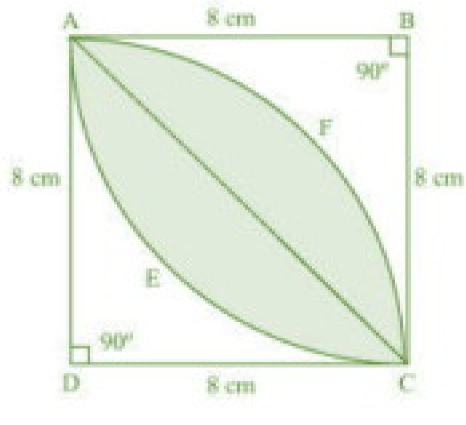
चतुर्थांश DAFC का क्षेत्रफल

$= \frac{90°}{360°} \times \pi r^2$

$= \frac{1}{4} \times \pi (8)^2$

$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 8 \times 8$

$= \frac{352}{7} \text{ cm}^2$



त्रिभुज ADC का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times DC \times AD$

$= \frac{1}{2} \times 8 \times 8$

$= 32 \text{ cm}^2$

वृत्तखंड का क्षेत्रफल = चतुर्थांश DAFC का क्षेत्रफल - त्रिभुज ADC का क्षेत्रफल

$= \left(\frac{352}{7} - 32\right) \text{ cm}^2$

$= \left(\frac{352 - 224}{7}\right) \text{ cm}^2$

$= \left(\frac{128}{7}\right) \text{ cm}^2$

छायांकित डिज़ाइन का क्षेत्रफल = दो वृत्तखंडों का क्षेत्रफल = $2 \times \left(\frac{128}{7}\right) \text{ cm}^2 = \frac{256}{7} \text{ cm}^2$