गणित

(www.tiwariacademy.com)

(पाठ – 12) (वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल)

(कक्षा 10)

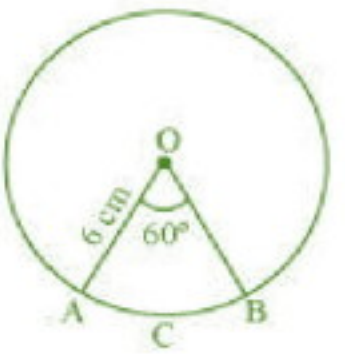
प्रश्नावली 12.2

प्रश्न 1:

6 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के एक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 60° है। [π = 22/7 का प्रयोग कीजिए]

उत्तर 1:

OACB वृत्त का त्रिज्यखंड है जिसका क्षेत्रफल ज्ञात करना है।



हम जानते हैं कि त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$

इसलिए, त्रिज्यखंड OACB का क्षेत्रफल

$= \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7}(6)^2$

$= \frac{1}{6} \times \frac{22}{7} \times 6 \times 6$

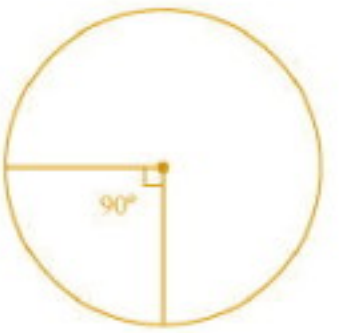
$= \frac{132}{7}\ \text{cm}^2$

प्रश्न 2:

एक वृत्त के चतुर्थांश (quadrant) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 22 cm है। [π = 22/7 का प्रयोग कीजिए]

उत्तर 2:

माना वृत्त की त्रिज्या = r



परिधि = 22 cm

इसलिए, $2\pi r = 22$

$\Rightarrow r = \frac{22}{2\pi} = \frac{11}{\pi}$

वृत्त का चतुर्थांश वृत्त के केंद्र पर 90° का कोण अंतरित करता है।

इसलिए, चतुर्थांश का क्षेत्रफल

$= \frac{90^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$

$= \frac{1}{4} \times \pi \left(\frac{11}{\pi}\right)^2 = \frac{1}{4} \times \pi \times \frac{11}{\pi} \times \frac{11}{\pi} = \frac{121}{4\pi} = \frac{121 \times 7}{4 \times 22} = \frac{77}{8}\ \text{cm}^2$

प्रश्न 3:

एक घडी की मिनट की सुई जिसकी लंबाई 14 cm है। इस सुई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [π = 22/7 का प्रयोग कीजिए]

उत्तर 3:

हम जानते हैं कि मिनट की सुई 1 घंटे में 360° का कोण बनाती है।

अतः, 5 मिनट में बनाया गया कोण $= \frac{360^\circ}{60} \times 5 = 30^\circ$

इसप्रकार, इस सुई द्वारा 5 मिनट में रचित क्षेत्रफल = 30° के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$= \frac{30^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$

$= \frac{1}{12} \times \pi(14)^2$

$= \frac{1}{12} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

$= \frac{154}{3}\ \text{cm}^2$

गणित

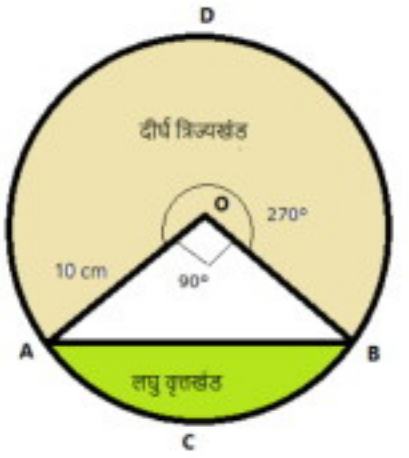
(www.tiwariacademy.com)
(पाठ – 12) (वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल)
(कक्षा 10)

प्रश्न 4:

10 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर एक समकोण अंतरित करती है। निम्लिखित के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए:
(i) संगत लघु वृत्तखंड **(ii)** संगत दीर्घ त्रिज्यखंड ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)।

उत्तर 4:

(i) माना AB वृत्त की कोई जीवा केंद्र O पर एक समकोण अंतरित करती है।



$90°$ के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$$= \frac{90°}{360°} \times \pi r^2 = \frac{1}{4} \times \pi(10)^2 = \frac{1}{4} \times 3.14 \times 10 \times 10 = 78.5 \text{ cm}^2$$

त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times OA \times OB = \frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50 \text{ cm}^2$$

लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल = लघु त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल - त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल

$$= 78.5 \text{ cm}^2 - 50 \text{ cm}^2 = 28.5 \text{ cm}^2$$

(ii) दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल - लघु त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$$= \pi r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 \quad = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\pi r^2 \quad = \frac{3}{4}\pi r^2$$

$$= \frac{3}{4} \times \pi(10)^2 \quad = \frac{3}{4} \times 3.14 \times 10 \times 10 \quad = 235.5 \text{ cm}^2$$

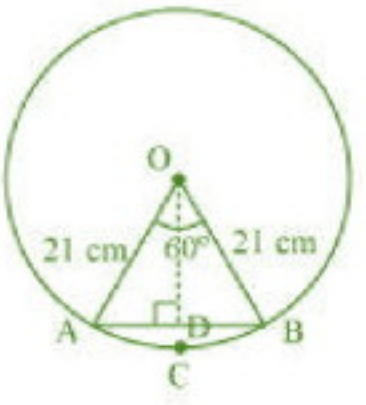
प्रश्न 5:

त्रिज्या 21 cm वाले एक वृत्त का एक चाप केंद्र पर $60°$ का कोण अंतरित करता है। ज्ञात कीजिए:
(i) चाप की लंबाई
(ii) चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल
(iii) संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखंड का क्षेत्रफल [$\pi = 22/7$ का प्रयोग कीजिए]

उत्तर 5:

वृत्त की त्रिज्या = 21 cm

(i) चाप की लंबाई



$$= \frac{\theta}{360°} \times 2\pi r \quad = \frac{60°}{360°} \times 2\pi r \quad = \frac{1}{6} \times 2 \times \pi \times 21 \quad = \frac{1}{6} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \quad = 22 \text{ cm}$$

(ii) चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$$= \frac{60°}{360°} \times \pi r^2$$

$$= \frac{1}{6} \times \pi(21)^2 \quad = \frac{1}{6} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \quad = 231 \text{ cm}^2$$

(iii) संगत जीवा द्वारा बनाए गए वृत्तखंड का क्षेत्रफल

= चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल - ΔOAB का क्षेत्रफल

$= 231 \text{ cm}^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}(21)^2 \text{ cm}^2$ [क्योंकि त्रिभुज OAB एक समबाहु त्रिभुज है]

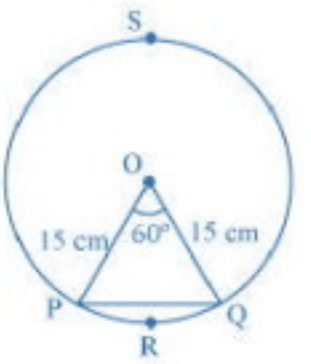
$= 231 \text{ cm}^2 - 441\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$

$= \left[231 - \frac{441\sqrt{3}}{4}\right] \text{ cm}^2$

प्रश्न 6:

15 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करती है। संगत लघु और दीर्घ वृत्तखंडों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [$\pi = 3.14$ और $\sqrt{3} = 1.73$ का प्रयोग कीजिए]

उत्तर 6:



वृत्त की त्रिज्या = 15 cm

चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखंड OPRQ का क्षेत्रफल

$= \frac{60°}{360°} \times \pi r^2 \quad = \frac{1}{6} \times \pi(15)^2 \quad = \frac{1}{6} \times 3.14 \times 15 \times 15 \quad = 117.75 \text{ cm}^2$

संगत लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल

= चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखंड OPRQ का क्षेत्रफल - ΔOPQ का क्षेत्रफल

$= 117.75 \text{ cm}^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}(15)^2 \text{ cm}^2$ [क्योंकि त्रिभुज OPQ एक समबाहु त्रिभुज है]

$= 117.75 \text{ cm}^2 - 225\frac{\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$

$= 117.75 \text{ cm}^2 - 56.25 \times 1.73 \text{ cm}^2$

$= 231 \text{ cm}^2 - 97.3125 \text{ cm}^2$

$= 20.4375 \text{ cm}^2$

दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल = वृत्त का क्षेत्रफल - लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल

$= \pi r^2 - 20.4375 \text{ cm}^2 \quad = [\pi(15)^2 - 20.4375] \text{ cm}^2 \quad = [3.14 \times 15 \times 15 - 20.4375] \text{ cm}^2$

$= [706.5 - 20.4375] \text{ cm}^2 \quad = 686.0625 \text{ cm}^2$

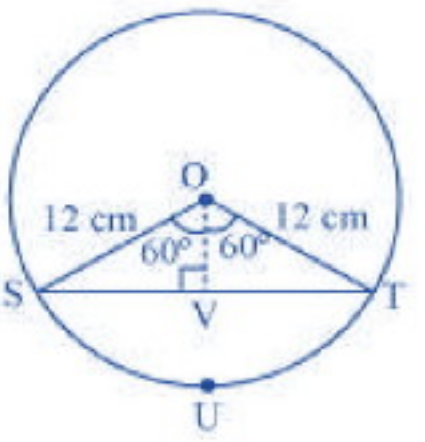
प्रश्न 7:

त्रिज्या 12 cm वाले एक वृत्त की कोई जीवा केंद्र पर 120° का कोण अंतरित करती है। संगत वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [$\pi = 3.14$ और $\sqrt{3} = 1.73$ का प्रयोग कीजिए]

उत्तर 7:

केंद्र O से जीवा ST पर डाला गया लम्ब OV, जीवा ST को समद्विभाजित करता है।

अतः, SV = VT



ΔOVS में,

$\frac{OV}{OS} = \cos 60° \quad \Rightarrow \frac{OV}{12} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow OV = 6 \text{ cm}$

$\frac{SV}{OS} = \sin 60° \quad \Rightarrow \frac{SV}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow OV = 6\sqrt{3} \text{ cm}$

$ST = 2 \times SV = 2 \times 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \text{ cm}$

ΔOST का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times ST \times OV \quad = \frac{1}{2} \times 12\sqrt{3} \times 6 \quad = 36\sqrt{3} \quad = 36 \times 1.73 \quad = 62.28 \text{ cm}^2$

चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखंड OSUT का क्षेत्रफल

$= \frac{120°}{360°} \times \pi r^2 \quad = \frac{1}{3} \times \pi(12)^2$

$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 12 \times 12 \quad = 150.72 \text{ cm}^2$

वृत्तखंड का क्षेत्रफल

= चाप द्वारा बनाए गए त्रिज्यखंड OSUT का क्षेत्रफल - ΔOST का क्षेत्रफल

$= (150.72 - 62.28) \text{ cm}^2$

$= 88.44 \text{ cm}^2$

प्रश्न 8:

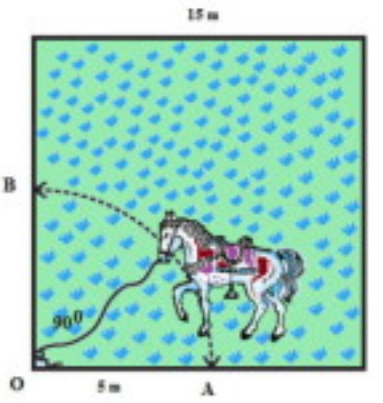
15 m भुजा वाले एक वर्गाकार घास के मैदान के एक कोने पर लगे खूंटे से एक घोड़े को 5 m लंबी रस्सी से बाँध दिया गया है। ज्ञात कीजिए:

(i) मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल जहाँ घोडा चार सकता है।

(ii) चरे जा सकने वाले क्षेत्रफल में वृद्धि, यदि घोड़े को 5 m लंबी रस्सी के स्थान पर 10 m लंबी रस्सी से बाँध दिया जाए। [$\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए]

उत्तर 8:

मैदान का वह भाग जहाँ घोडा चार सकता है, एक त्रिज्यखंड, जिसका कोण $90°$ है।



(i) मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल जहाँ घोडा चार सकता है

= त्रिज्यखंड OABO का क्षेत्रफल

$$= \frac{90°}{360°} \times \pi r^2 \quad = \frac{1}{4} \times \pi(5)^2 \quad = \frac{1}{4} \times 3.14 \times 25 \quad = 19.625 \text{ m}^2$$

(ii) यदि घोड़े को 5 m लंबी रस्सी के स्थान पर 10 m लंबी रस्सी से बाँध दिया जाए, मैदान के उस भाग का क्षेत्रफल जहाँ घोडा चार सकता है

= त्रिज्यखंड OABO का क्षेत्रफल

$$= \frac{90°}{360°} \times \pi r^2 \quad = \frac{1}{4} \times \pi(10)^2 \quad = \frac{1}{4} \times 3.14 \times 100 \quad = 78.50 \text{ m}^2$$

चरे जा सकने वाले क्षेत्रफल में वृद्धि = $(78.50 - 19.625)\ \text{m}^2 = 58.875\ \text{m}^2$

प्रश्न 9:

एक वृत्ताकार ब्रूच (brooch) को चाँदी के तार से बनाया जाना है जिसका व्यास 35 mm है। तार को वृत्त के 5 व्यासों को बनाने में भी प्रयुक्त किया गया है जो उसे 10 बराबर त्रिज्यखंडों में विभाजित करता है जैसा की आकृति में दर्शाया गया है। तो ज्ञात कीजिए:

(i) कुल वांछित चाँदी के तार की लंबाई

(ii) ब्रूच के प्रत्येक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल [$\pi = 22/7$ का प्रयोग कीजिए]

उत्तर 9:

व्यास = 35 mm

इसलिए, त्रिज्या = 35/2 mm

(i) कुल वांछित चाँदी के तार की लंबाई

= 5×व्यास + परिधि = $5 \times 35 + 2\pi r$

$$= 175 + 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{2} = 175 + 110 = 285 \text{ mm}$$

(ii) आकृति के अनुसार कुल 10 त्रिज्यखंड हैं ।

इसलिए, प्रत्येक त्रिज्यखंड द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण = $\frac{360°}{10} = 36°$

ब्रूच के प्रत्येक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$$= \frac{36°}{360°} \times \pi r^2$$

$$= \frac{1}{10} \times \pi \left(\frac{35}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{2} \times \frac{35}{2}$$

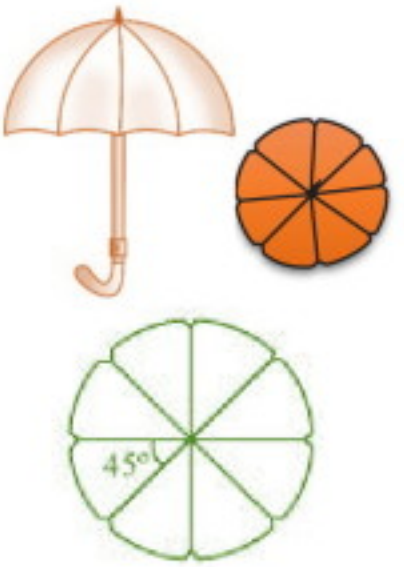
$$= \frac{385}{4}\ \text{mm}^2$$

गणित

(www.tiwariacademy.com)
(पाठ – 12) (वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल)
(कक्षा 10)

प्रश्न 10:

एक छतरी में आठ ताने हैं, जो बराबर दूरी पर लगे हुए हैं। छतरी को 45 cm त्रिज्या वाला एक सपाट वृत्त मानते हुए, इसकी दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। [$\pi = 22/7$ का प्रयोग कीजिए]



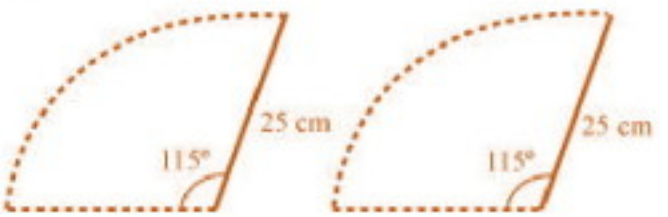
उत्तर 10:

त्रिज्या = 45 cm
आकृति के अनुसार कुल 8 त्रिज्यखंड हैं ।
इसलिए, प्रत्येक त्रिज्यखंड द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण = $\frac{360°}{8} = 45°$
दो क्रमागत तानों के बीच का क्षेत्रफल = एक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$$= \frac{45°}{360°} \times \pi r^2 \quad = \frac{1}{8} \times \pi (45)^2$$
$$= \frac{1}{8} \times \frac{22}{7} \times 45 \times 45 \quad = \frac{22275}{28} \text{ cm}^2$$

प्रश्न 11:

किसी कार के दो वाइपर (Wipers) हैं, परस्पर कभी आच्छादित नहीं होते हैं। प्रत्येक वाइपर की पत्ती की लंबाई 25 cm है और 115° के कोण तक घूम कर सफाई कर सकता है। पत्तियों की प्रत्येक बुहार के साथ जितना क्षेत्रफल साफ हो जाता है, वह ज्ञात कीजिए। [$\pi = 22/7$ का प्रयोग कीजिए]



उत्तर 11:

प्रत्येक वाइपर द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण = 115°
त्रिज्या = 25 cm
पत्तियों की बुहार के साथ साफ होने वाला क्षेत्रफल = प्रत्येक वाइपर द्वारा बने त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$$= \frac{115°}{360°} \times \pi r^2 \quad = \frac{23}{72} \times \pi (25)^2 \quad = \frac{23}{72} \times \frac{22}{7} \times 25 \times 25 \quad = \frac{158125}{252} \text{ cm}^2$$

दोनों वाइपर द्वारा बने त्रिज्यखंड का कुल क्षेत्रफल = $2 \times \frac{158125}{252} = \frac{158125}{126} \text{ cm}^2$

प्रश्न 12:

जहाजों को समुद्र में जलस्तर के नीचे स्थित चट्टानों की चेतावनी देने के लिए, एक लाइट हाउस (light house) 80° कोण वाले एक त्रिज्यखंड में 16.5 km की दूरी तक लाल रंग का प्रकाश फैलता है। समुद्र के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमे जहाजों को चेतावनी दी जा सके। [$\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए]

उत्तर 12:

लाइट हाउस 80° कोण वाले एक त्रिज्यखंड में 16.5 km की दूरी तक लाल रंग का प्रकाश फैलता है।
इसलिए, त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$$= \frac{80°}{360°} \times \pi r^2 \quad = \frac{2}{9} \times \pi (16.5)^2$$
$$= \frac{2}{9} \times 3.14 \times 16.5 \times 16.5 \quad = 189.97 \text{ km}^2$$

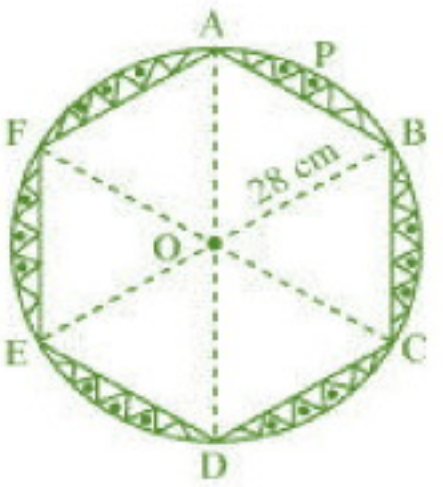
प्रश्न 13:

एक गोल मेज़पोश पर छः समान डिज़ाइन बने हुए हैं जैसाकि आकृति में दर्शाया गया है। यदि मेज़पोश की त्रिज्या 28 cm है, तो ₹ 0.35 प्रति वर्ग सेंटीमीटर की दर से इन डिज़ाइनों को बनाने की लागत ज्ञात कीजिए। [$\pi = 22/7$ और $\sqrt{3} = 1.7$ का प्रयोग कीजिए]

उत्तर 13:

मेज़पोश पर छः समान डिज़ाइन = छः समान वृत्तखंड

इसलिए, प्रत्येक त्रिज्यखंड द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण = $\frac{360°}{6} = 60°$



ΔOAB में,

∠OAB = ∠OBA [क्योंकि OA = OB]

∠AOB = 60°

∠OAB + ∠OBA + ∠AOB = 180°

2∠OAB = 180° − 60° = 120°

∠OAB = 60°

इसप्रकार, ΔOAB एक समबाहु त्रिभुज है।

त्रिज्यखंड OAPB का क्षेत्रफल

$= \frac{60°}{360°} \times \pi r^2 \quad = \frac{1}{6} \times \pi(28)^2$

$= \frac{1}{6} \times \frac{22}{7} \times 28 \times 28 \quad = \frac{1232}{3}\ \text{cm}^2$

समबाहु त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल

$= \frac{\sqrt{3}}{4}(28)^2 \quad = 196\sqrt{3}$

$= 196 \times 1.7 \quad = 333.2\ \text{cm}^2$

वृत्तखंड का क्षेत्रफल

= त्रिज्यखंड OAPB का क्षेत्रफल - समबाहु त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल

$= \left(\frac{1232}{3} - 333.2\right)\ \text{cm}^2$

मेज़पोश पर छः डिज़ाइनों का क्षेत्रफल

$= 6 \times \left(\frac{1232}{3} - 333.2\right)\ \text{cm}^2$

$= (2464 - 1999.2)\ \text{cm}^2 \quad = 464.8\ \text{cm}^2$

$1\ \text{cm}^2$ डिज़ाइन को बनाने की लागत = ₹ 0.35

इसलिए, $464.8\ \text{cm}^2$ वर्ग सेंटीमीटर डिज़ाइन को बनाने की कुल लागत = ₹0.35 × 464.8 = ₹ 162.68

प्रश्न 14:

निम्नलिखित में सही उत्तर चुनिए:

त्रिज्या R वाले वृत्त के उस त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल जिसका कोण $P°$ है, निम्नलिखित है:

(A) $\frac{P}{180} \times 2\pi R$ (B) $\frac{P}{180} \times \pi R^2$ (C) $\frac{P}{360} \times 2\pi R$ (D) $\frac{P}{720} \times 2\pi R^2$

उत्तर 14:

हम जानते हैं कि त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल जिसका कोण $P°$ है

$= \frac{P}{360} \times \pi R^2$

$= \frac{P}{360} \times \pi R^2 \times \frac{2}{2}$

$= \frac{P}{720} \times 2\pi R^2$

इसलिए, (D) विकल्प सही है।