गणित

(www.tiwariacademy.com)

(पाठ – 10) (वृत्त)

(कक्षा 10)

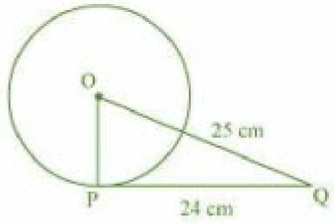
प्रश्नावली 10.2

प्रश्न 1:

एक बिंदु से एक वृत पर स्पर्श रेखा की लंबाई तथा की केंद्र से दूरी है। वृत्त की त्रिज्या है:

(A) 7 cm (B) 12 cm (C) 15 cm (D) 24.5 cm

उत्तर 1:



माना वृत्त का केंद्र O है।

दिया है: OQ = 25cm और PQ = 24 cm

हम जानते हैं कि त्रिज्या, स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है। इसलिए, $OP \perp PQ$

ΔOPQ में, पाइथागोरस प्रमेय से,

$OP^2 + PQ^2 = OQ^2$

$OP^2 + 24^2 = 25^2$

$OP^2 = 625 - 576$

$OP^2 = 49$

$OP = 7$

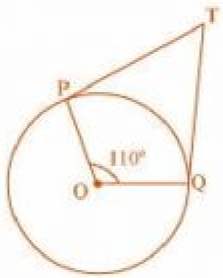
इसलिए, वृत्त की त्रिज्या 7 cm है। अतः, विकल्प (A) सही है।

प्रश्न 2:

आकृति में, यदि TP, TQ केंद्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ इस प्रकार हैं $\angle POQ = 110°$ कि तो $\angle PTQ$ बराबर है:

(A) 60° (B) 70° (C) 80° (D) 90°

उत्तर 2:



दिया है: TQ और TP वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ हैं।

हम जानते हैं कि त्रिज्या, स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है।

इसलिए, $OP \perp TP$ और $OQ \perp TQ$

$\angle OPT = 90°$

$\angle OQT = 90°$

चतुर्भुज POQT में,

$\angle OPT + \angle POQ + \angle OQT + \angle PTQ = 360°$

$\Rightarrow 90° + 110° + 90° + \angle PTQ = 360°$

$\Rightarrow \angle PTQ = 360° - 290° = 70°$

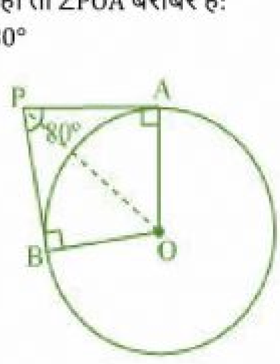
इसलिए, विकल्प (B) सही है।

प्रश्न 3:

यदि एक बिंदु P से O केंद्र वाले किसी वृत्त पर PA, PB स्पर्श रेखाएँ परस्पर 80° के कोण पर झुकी हों तो $\angle POA$ बराबर है:

(A) 50° (B) 60° (C) 70° (D) 80°

उत्तर 3:



दिया है: PA और PB वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ हैं।

हम जानते हैं कि त्रिज्या, स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है।

इसलिए, $OA \perp PA$ और $OB \perp PB$

$\angle OBP = 90°$ और $\angle OAP = 90°$

चतुर्भुज AOBP में, $\angle OAP + \angle APB + \angle PBO + \angle BOA = 360°$

$\Rightarrow 90° + 80° + 90° + \angle BOA = 360°$

$\Rightarrow \angle BOA = 360° - 260° = 100°$

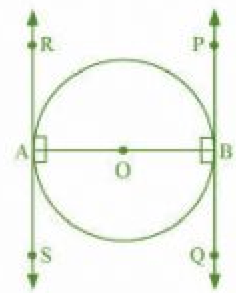
ΔOPB और ΔOPA में,

AP = BP	[एक ही बिंदु से खींची गई स्पर्श रेखाएँ]
OA = OB	[वृत्त की त्रिज्याएँ]
OP = OP	[उभयनिष्ठ]
इसलिए, ΔOPB ≅ ΔOPA	[SSS सर्वांगसम प्रमेय]

अतः, $\angle POB = \angle POA$

$\angle POA = ½ \angle AOB = ½ (100°) = 50°$, इसलिए, विकल्प (A) सही है।

प्रश्न 4:
सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समांतर होती हैं।

उत्तर 4:


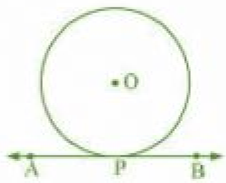
माना AB व्यास है तथा PQ और RS सिरों पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ हैं।
हम जानते हैं कि त्रिज्या, स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है।
इसलिए, $OA \perp RS$ और $OB \perp PQ$
$\angle OAR = 90°$ और $\angle OAS = 90°$
$\angle OBP = 90°$
$\angle OBQ = 90°$
उपरोक्त से हमें निम्लिखित परिणाम प्राप्त होते हैं:

$\angle OAR = \angle OBQ$	[एकान्तर कोण]
$\angle OAS = \angle OBP$	[एकान्तर कोण]

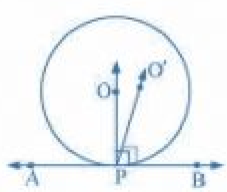
क्योंकि एकान्तर कोण बराबर हैं, इसलिए रेखाएँ PQ और PS समांतर होंगी।

प्रश्न 5:
सिद्ध कीजिए कि स्पर्श बिंदु से स्पर्श रेखा पर खींचा गया लंब वृत्त के केंद्र से होकर जाता है।

उत्तर 5:
माना O केंद्र वाले वृत्त पर AB एक स्पर्श रेखा है जो वृत्त को P पर स्पर्श करती है।
हमें सिद्ध करना है कि स्पर्श बिंदु P से स्पर्श रेखा पर खींचा गया लंब वृत्त के केंद्र O से होकर जाता है। हम इसे विरोधाभास विधि से सिद्ध करेंगे।



मान लीजिए कि बिंदु P से स्पर्श रेखा पर खींचा गया लंब वृत्त के केंद्र O से होकर नहीं जाता है। यह एक और बिंदु O′ से होकर जाता है। OP तथा O′P मिलाया।
P से स्पर्श रेखा पर खींचा गया लंब वृत्त के केंद्र O′ से होकर जाता है। इसलिए,

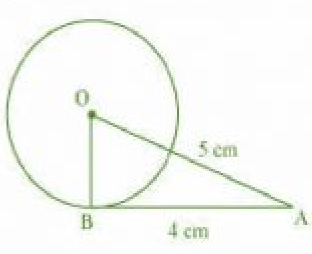


$\angle O'PB = 90°$ ... (1)
हम जानते हैं कि त्रिज्या, स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है। इसलिए,
$\therefore \angle OPB = 90°$ ... (2)
समीकरण (1) और (2) की तुलना करने पर
$\angle O'PB = \angle OPB$ ... (3)
आकृति से हमें यह स्पष्ट होता है कि,
$\angle O'PB < \angle OPB$ ... (4)

इसलिए, $\angle O'PB = \angle OPB$ संभव नहीं है। ये तभी संभव है जब OP और O′P संपाती रेखाएँ हों।

इसलिए, P से स्पर्श रेखा पर खींचा गया लंब वृत्त के केंद्र O से होकर जाता है।

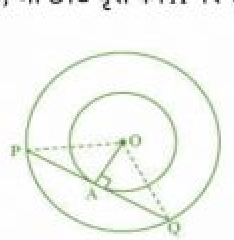
प्रश्न 6:
एक बिंदु A से, जो एक वृत्त के केंद्र से 5 cm दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 4 cm है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर 6:


माना O केंद्र वाले वृत्त पर AB एक स्पर्श रेखा है जो वृत्त को B पर स्पर्श करती है।
दिया है: OA = 5cm और AB = 4 cm
हम जानते हैं कि त्रिज्या, स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है।
इसलिए, ΔABO में, $OB \perp AB$
ΔABO में, पाइथागोरस प्रमेय से, $AB^2 + BO^2 = OA^2$
$\Rightarrow 4^2 + BO^2 = 5^2$ $\Rightarrow 16 + BO^2 = 25$ $\Rightarrow BO^2 = 9$ $\Rightarrow BO = 3$
इसलिए, वृत्त की त्रिज्या 3 cm है।

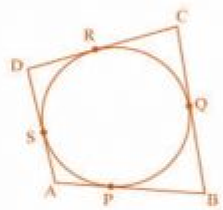
प्रश्न 7:
दो संकेंद्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ 5 cm तथा 3 cm हैं। बड़े वृत्त की उस जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए जो छोटे वृत्त को स्पर्श करती हो।

उत्तर 7:
माना O केंद्र वाले दो संकेंद्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ 5 cm (OP) तथा 3 cm (OA) हैं। PQ बड़े वृत्त की जीवा है, जो छोटे वृत्त को A पर स्पर्श करती हो। अतः PQ छोटे वृत्त की स्पर्श रेखा है।

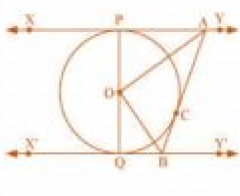


हम जानते हैं कि त्रिज्या, स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है।
इसलिए, ΔPQO में, $OA \perp PQ$
ΔAPO में, पाइथागोरस प्रमेय से, $OA^2 + AP^2 = OP^2$
$\Rightarrow 3^2 + AP^2 = 5^2$ $\Rightarrow 9 + AP^2 = 25$ $\Rightarrow AP^2 = 16$ $\Rightarrow AP = 4$
ΔOPQ में, $OA \perp PQ$,
AP = AQ [केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब उसे समद्विभाजित करता है]
अतः, $PQ = 2AP = 2 \times 4 = 8$
इसलिए, बड़े वृत्त की उस जीवा की लंबाई 8 cm है।

प्रश्न 8:
एक वृत्त के परिगत एक चतुर्भुज ABCD खींचा गया है। सिद्ध कीजिए: AB + CD = AD + BC

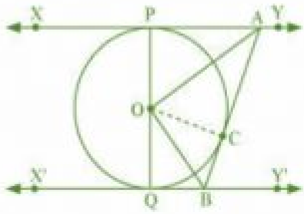
उत्तर 8:


हम जानते हैं कि एक ही बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समान होती हैं इसलिए,
DR = DS [बिंदु D से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ] ... (1)
CR = CQ [बिंदु C से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ] ... (2)
BP = BQ [बिंदु B से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ] ... (3)
AP = AS [बिंदु A से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ] ... (4)
समीकरण (1), (2), (3) और (4) को जोड़ने पर
DR + CR + BP + AP = DS + CQ + BQ + AS $\Rightarrow$ (DR + CR) + (BP + AP) = (DS + AS) + (CQ + BQ)
CD + AB = AD + BC

प्रश्न 9:


आकृति में, XY तथा X'Y', O केंद्र वाले किसी वृत्त पर दो समांतर स्पर्श रेखाएँ हैं और स्पर्श बिंदु C पर स्पर्श रेखा AB, XY को A तथा X'Y' को B पर प्रतिच्छेद करती है। सिद्ध कीजिए कि $\angle AOB = 90°$ है।

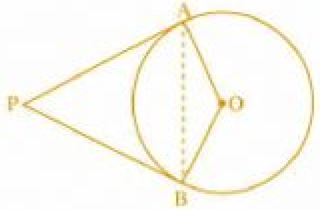
उत्तर 9:
C को O से मिलाया।



ΔOPA और ΔOCA में,
$OP = OC$ [एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ]
$AP = AC$ [बिंदु A से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ]
$AO = AO$ [उभयनिष्ठ]
$\Delta OPA \cong \Delta OCA$ [SSS सर्वांगसम प्रमेय]
अतः, $\angle POA = \angle COA$ ... (i)
इसी तरह से, $\Delta OQB \cong \Delta OCB$
अतः, $\angle QOB = \angle COB$ ... (ii)
क्योंकि POQ वृत्त का व्यास है इसलिए एक सरल रेखा है।
अतः, $\angle POA + \angle COA + \angle COB + \angle QOB = 180°$
समीकरण (i) और (ii) से,
$2\angle COA + 2\angle COB = 180°$ $\Rightarrow \angle COA + \angle COB = 90°$ $\Rightarrow \angle AOB = 90°$

प्रश्न 10:
सिद्ध कीजिए कि किसी बाह्य बिंदु से किसी वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण का संपूरक होता है।

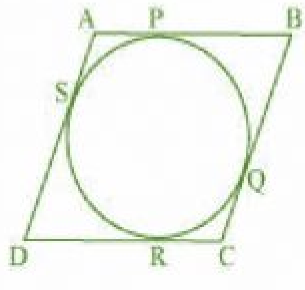
उत्तर 10:



माना O केंद्र वाले वृत्त पर PA तथा PB स्पर्श रेखाएँ हैं जो वृत्त को A और B पर स्पर्श करती हैं।
OA और OB को मिलाया।
हम जानते हैं कि त्रिज्या, स्पर्श रेखा पर लम्ब होती है।
इसलिए, $\angle OAP = 90°$ और $\angle OBP = 90°$
चतुर्भुज OAPB में, $\angle OAP + \angle APB + \angle PBO + \angle BOA = 360°$
$\Rightarrow 90° + \angle APB + 90° + \angle BOA = 360°$ $\Rightarrow \angle APB + \angle BOA = 180°$
इस प्रकार यह सिद्ध हो जाता है कि किसी बाह्य बिंदु से किसी वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण स्पर्श बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण का संपूरक होता है।

प्रश्न 11:
सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के परिगत समांतर चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है।

उत्तर 11:

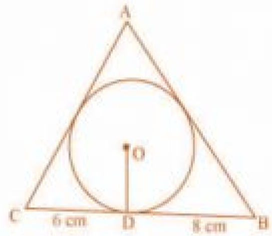


क्योंकि एक समांतर चतुर्भुज है, अतः
$AB = CD$ ... (1)
$BC = AD$ ... (2)
हम जानते हैं कि एक ही बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समान होती हैं इसलिए,
$DR = DS$ [बिंदु D से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ] ... (3)
$CR = CQ$ [बिंदु C से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ] ... (4)
$BP = BQ$ [बिंदु B से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ] ... (5)
$AP = AS$ [बिंदु A से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ] ... (6)
समीकरण (3), (4), (5) और (6) को जोड़ने पर
$DR + CR + BP + AP = DS + CQ + BQ + AS$
$\Rightarrow (DR + CR) + (BP + AP) = (DS + AS) + (CQ + BQ)$ $\Rightarrow CD + AB = AD + BC$
समीकरण (1) और (2) से
$2AB = 2BC$ $\Rightarrow AB = BC$ ... (7)
समीकरण (1), (2) और (7) से
$AB = BC = CD = DA$
अतः, ABCD समचतुर्भुज है।

प्रश्न 12:

4 cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के परिगत एक त्रिभुज ABC इस प्रकार खींचा गया है कि रेखाखंड BD और DC (जिनमें स्पर्श बिंदु D द्वारा BC विभाजित है) की लंबाइयाँ क्रमशः 8 cm और 6 cm हैं (देखिए आकृति)। भुजाएँ AB और AC ज्ञात कीजिए।

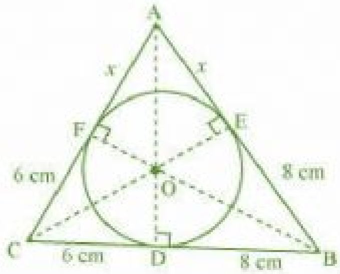
उत्तर 12:



माना वृत्त AB और AC को क्रमशः E और F पर स्पर्श करता है। माना AF की लंबाई x है।
हम जानते हैं कि एक ही बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समान होती हैं इसलिए,

CF = CD = 6cm [बिंदु C से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ]
BE = BD = 8cm [बिंदु B से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ]
AE = AF = x [बिंदु A से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ]

AB = AE + EB = x + 8
BC = BD + DC = 8 + 6 = 14
CA = CF + FA = 6 + x
ΔABC में,
2s = AB + BC + CA = x + 8 + 14 + 6 + x = 28 + 2 x
∴ s = 14 + x



ΔABC का क्षेत्रफल
$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
$= \sqrt{\{14+x\}\{(14+x)-14\}\{(14+x)-(8+x)\}\{(14+x)-(6+x)\}}$
$= \sqrt{(14+x)(x)(6)(8)}$
$= \sqrt{48x(14+x)}$ cm²
$= 4\sqrt{3(14x+x^2)}$ cm²

ΔOBC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times OD \times BC = \frac{1}{2} \times 4 \times 14 = 28$ cm²
ΔOCA का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times OF \times AC = \frac{1}{2} \times 4 \times (6+x) = 12 + 2x$ cm²
ΔOAB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times OE \times AB = \frac{1}{2} \times 4 \times (8+x) = 16 + 2x$ cm²

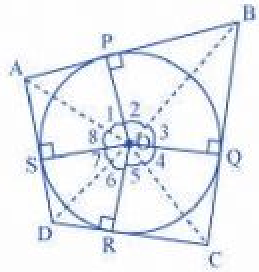
ΔABC का क्षेत्रफल = ΔOBC का क्षेत्रफल + ΔOCA का क्षेत्रफल + ΔOAB का क्षेत्रफल
$\Rightarrow 4\sqrt{3(14x+x^2)} = 28 + (12+2x) + (16+2x)$
$\Rightarrow 4\sqrt{3(14x+x^2)} = 56 + 4x$
$\Rightarrow \sqrt{3(14x+x^2)} = 14 + x$
$\Rightarrow 3(14x+x^2) = (14+x)^2$
$\Rightarrow 42x + 3x^2 = 196 + x^2 + 28x$
$\Rightarrow 2x^2 + 14x - 196 = 0$
$\Rightarrow x^2 + 7x - 98 = 0$
$\Rightarrow x^2 + 14x - 7x - 98 = 0$
$\Rightarrow x(x+14) - 7(x+14) = 0$
$\Rightarrow (x+14)(x-7) = 0$
$\Rightarrow x + 14 = 0$ या $x - 7 = 0$
इसलिए, $x = -14$ या 7
परन्तु त्रिभुज की भुजा कभी ऋणात्मक नहीं हो सकती है अतः, $x \neq -14$
इसलिए, $x = 7$
इसप्रकार, AB = x + 8 = 7 + 8 = 15 cm और CA = 6 + x = 6 + 7 = 13 cm

प्रश्न 13:

सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त के परिगत बनी चतुर्भुज की आमने - सामने की भुजाएँ केंद्र पर संपूरक कोण अंतरित करती हैं।

उत्तर 13:

चतुर्भुज ABCD केंद्र O वाले वृत्त के परिगत बना है जो वृत्त को P, Q, R और S पर स्पर्श करता है। P, Q, R और S से केंद्र O को मिलाया।



ΔOAP और ΔOAS में,

$OP = OS$ [एक ही वृत्त की त्रिज्याएँ]

$AP = AS$ [बिंदु A से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ]

$AO = AO$ [उभयनिष्ठ]

$\Delta OPA \cong \Delta OCA$ [SSS सर्वांगसम प्रमेय]

अतः, $\angle POA = \angle SOA$

अर्थात $\angle 1 = \angle 8$

इसीप्रकार,

$\angle 2 = \angle 3$

$\angle 4 = \angle 5$

$\angle 6 = \angle 7$

बिंदु O पर बने सभी कोणों का योग 360º होगा। अतः

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360°$

$\Rightarrow (\angle 1 + \angle 8) + (\angle 2 + \angle 3) + (\angle 4 + \angle 5) + (\angle 6 + \angle 7) = 360°$

$\Rightarrow 2\angle 1 + 2\angle 2 + 2\angle 5 + 2\angle 6 = 360°$

$\Rightarrow 2(\angle 1 + \angle 2) + 2(\angle 5 + \angle 6) = 360°$

$\Rightarrow (\angle 1 + \angle 2) + (\angle 5 + \angle 6) = 180°$

$\Rightarrow \angle AOB + \angle COD = 180°$

इसीप्रकार, हम सिद्ध कर सकते हैं $\angle BOC + \angle DOA = 180°$

अतः, चतुर्भुज की आमने - सामने की भुजाएँ केंद्र पर संपूरक कोण अंतरित करती हैं।